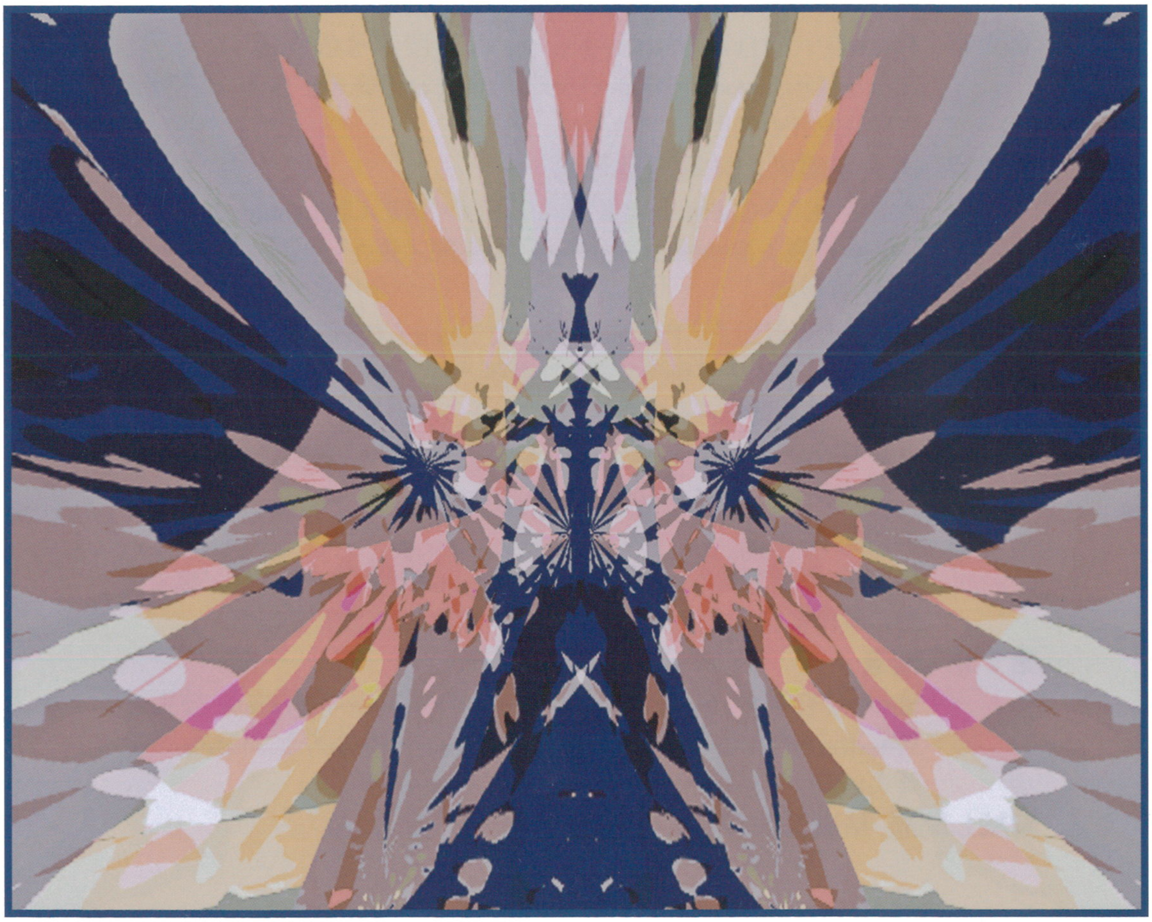
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2013年4月1日発行　第51巻4号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

4
2013

特集 解析学における様々な発想
現象の本質を解き明かすために



No.598
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 598 April 2013

解析学における様々な発想

現象の本質を解き明かすために

表紙：戸川 隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間(本誌のみ) 11,000円，半年間(本誌のみ) 5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2009年/11 省略
2009年/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊　現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013年/1 表現論の世界
/2《量子化》の発想
/3 光と物理学

数理科学臨時別冊一覧

12年/1 現象から方程式を創り出す
12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12年/4 弦理論の代数的基礎
12年/5 アインシュタイン方程式
12年/6 CP 対称性の破れ
12年/7 弦の場の理論
12年/9 超弦理論の応用
12年/10 複素多様体論講義
12年/11 幾何学の量子化
12年/12 量子力学から超対称性へ
13年/1 行列解析ノート

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
丸善日本橋店
MARUZEN多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学 (北１店)
九州大学 (理系)

April 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 598

特集／解析学における様々な発想

解析学の発想

儀我 美一

数学でいう「解析」とは何であろうか．一般用語の「解析」とは意味が異なる．手許の国語辞典，例えば『新明解国語辞典（第4版）』（金田一他，三省堂）によると，「解析」は「複雑な機構をもつ現象を解明するために細かく分析すること」と説明されている．数学では漠然と「関数」を研究することと考えられている場合も多いが，これは関数をテーラー展開したりフーリエ展開するなどして，無限個の項の和に分解して研究してきたことに由来する．このような発想は確かに関数の性質を調べる上で重要である．本特集の後藤俊一氏の解説は，「展開」という考え方の有用性についてわかりやすく説明している．しかし「関数」を扱いさえすれば「解析学」に取り組んでいるということにはならない．数学における「解析学」とは「極限や収束を扱う分野」であると考えるのが自然であろう．McGraw-Hill（マグロウヒル）社の《Dictionary of Scientific and Technical Terms》（科学技術用語辞典）にもそのように説明されている．例えば「変数を少しずらしたとき，関数の値や性質がどう変化するか」という問いは，解析学的な問題意識といえよう．

代数方程式を研究するから代数学，微分方程式を研究するから解析学と呼ばれるわけではない．2次方程式を考えよう．係数が少しずれると解も少しずれるが，それがどのようにずれるか，値が急に大きく変わるのか，それともゆるやかに変わるのかという問題は，解析の問題である．行列の成分を変化させると行列の固有値がどのように変わるかを見る，これも解析の問題である．

2次方程式のような代数方程式の解について考えてみると，代数学の立場からは，解の公式はどうなっているか，どのような操作で解が得られるかが重要になってくる．それに対して，解が存在するか，あるいは解の値の大きさはどの程度かを見積もることは，解析の問題といえる．「n 次方程式には必ず n 個（重複も許す）の複素数解が存在する」というガウスの定理は，通常「代数学の基本定理」と呼ばれ，いくつか証明方法が知られている．なかでも「解析」の発想による証明のうちワイエルシュトラスによるものなどは，代数的操作の繰り返しで一般に解が得られない場合に，解をうまく近似していくことで解決するものである．ここで大きさを見積もる，また近似の度合いを調べるためには，どうしても「不等式の発想」が必要になる．本特集の小澤徹氏による解説では，不等式の発想の重要性が様々な角度から述べられている．特に微分方程式の解の存在問題は，解析的発想がよく生かされ得る問題である．解が具体的な関数で表せない場合にも解があることを示すことは大変重要であり，上述のガウスの定理も解表示なしで解の存在性を示したものである．ある微

分方程式の解がただ一つであること（一意性）を示すことも，解析の重要な役割である．注目している微分方程式が何らかの自然の法則を表していると想定している場合，解がただ一つかどうかがわかることは，現象を客観的に記述する上での第一歩となる．本特集の小薗英雄氏の解説では，解の存在，一意性問題の重要性について述べられている．

さて，解析は，定常的対象にとどまらず，その動きや変化の解明に力を発揮している．それは，自然法則を的確に理解する上で極めて有効である．例えば太鼓を叩いたときの音の高さ（振動数といってもよい）は，数学的にはラプラス作用素の固有値問題と捉えることができる．太鼓の膜の形が円の場合は変数分離法などで厳密に固有値（振動数）がわかるが，完全な円の膜を作ることは現実には難しい．もし円の場合にいえる性質が，円から少しでもずれると全然違ってしまうとすると，円で調べた性質は現実には役に立たない．解析では円から少しずれても，振動数は少ししかずれないといったことを積極的に示していく．これは設定が少しずれても結果は少しのずれに留まるという，摂動に対する安定性を主張するものである．このような視点は，現実の現象の理解のためにもとても重要なことである．

最初に述べたように「極限や収束を扱う数学分野」としての解析は大変広く，様々な分野がある．本特集では，その中で特に「微分方程式」に関係する話を主体にいくつかのテーマを選んだ．いち早く数学の諸分野だけでなく自然科学全体に影響を与えた解析学の分野は，微分積分の創設以降では「複素関数論」であろう．その後，変分解析の進展に伴い，関数解析学が発達していった．

本特集の高坂良史氏の解説では，複素関数論と関数解析学がうまく結び付けられ，放物型（拡散型）偏微分方程式を解くのに有用な，解析半群論の初歩について述べられている．解析半群論は我が国の碩学の吉田耕作先生により創設されたものである．美しい抽象論と幅広い応用のあるこの理論は，解析学の一つの著しい成功例である．

変分問題の解を微分方程式の解とみなすためには，しばしば（通常の意味では）微分できない関数に対して，それが微分方程式の解であると主張することが便利な場合が多い．そのため，微分方程式の必ずしも微分できない解として「弱解」という概念が提案されている．これを契機に超関数論が発展した．シュワルツの超関数と，佐藤幹夫先生による佐藤超関数が代表的である．いずれも微分できない関数に対して微分を定義できるところが特徴である．シュワルツの超関数は部分積分法に基づき微分を定義するが，佐藤超関数は複素解析関数の実軸への境界値として超関数を捉えているので，その複素解析関数を微分することにより微分を定義する．また近年，最大値原理に基づく弱解である粘性解という概念も，1 階偏微分方程式や，2 階楕円型，放物型偏微分方程式を扱う上で重要になっている．これら弱解，超関数，粘性解については，長澤壮之氏，本多尚文氏，三竹大寿氏の解説で，その初歩が紹介されている．

解析の発想には，初等関数などの具体的な関数で表しにくい関係を，どの量がどの量にどのように依存するかを注意深くみることにより，その本質に迫っていこうという面がある．解析学は，近年のポアンカレ予想の解決にリッチ流方程式という偏微分方程式が本質的に用いられたように，数学の諸分野への著しい応用があるだけではなく，物理学はもちろん自然科学，社会科学，また工学分野への幅広い応用がある．さらに，今まで解析学で扱われてこなかった分野への解析の展開は，科学や技術のブレイクスルーにつながることが予想される．読者の皆様にも解析の発想を楽しんでいただければ幸いである．

（ぎが・よしかず，東京大学大学院数理科学研究科）

解析学における不等式の発想

小澤 徹

1. 序

解析学における不等式の重要性は，自然科学における数学の重要性に相当すると言っても言い過ぎではないであろう．非線型発展方程式の大域理論におけるアプリオリ評価や楕円型方程式に関する楕円型評価やゴルディング型不等式は，問題の本質が不等式に帰着される典型的な例である．その重要性にもかかわらず，不等式の概念は等式のずっと後に学ぶためか，有名な公式や定理に登場する「等式」は「不等式」より圧倒的に多いためか，我が国での「不等式」の評価は「等式」に較べ著しく低いのが現状である．本誌でも「不等式」が特集されたのは，ここ30年ほどでは1995年8月の第386号『現代の不等式』が唯一のものである．しかし，そもそも「不等式」を「等式」の対立概念と位置付けるのは誤りである．「等式」と「不等式」が同じ枠組みで意味を持つのは，順序構造が入っている場合に限るばかりでなく，「不等式」の世界では「等式」はその一部に過ぎず，「不等式」の特殊かつ極端な場合として「等式」は存在するとも考えられるからである．上記特集号の副題は「解析学での本質的役割」となっている．見事なタイトルである．本稿の目的は，「不等式マニアコレクション」を究めるわけでも「不等式の生む新概念」を目指すわけでもなく，良く知られた基本定理や具体例を通じて，解析学における不等式の役割とその基礎を成す考え方を解説することである．

2. 順序構造における不等式と等式

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ には大小関係を表す**順序**の概念が定義され，**全順序集合**を成している．即ち任意の実数 a, b に対し $a \leq b$ または $a \geq b$ の少なくとも一方が成立する．等式 $a = b$ が成立することは2つの不等式 $a \leq b$ および $a \geq b$ がともに成立することと同値である．$a \leq b$ かつ $a \neq b$ であるとき $a < b$ と表す．次の命題は良く用いられる．

命題1 2つの実数 a, b に対し次は同値である．
(1) $a \leq b$.
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $a < b + \varepsilon$.
(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $a \leq b + \varepsilon$.

有界閉区間 I 上の実数値連続函数全体 $C(I; \mathbb{R})$ は一様ノルムによりバナッハ空間を成し，各点での値の不等式により順序集合を成している．一般に，実ノルム空間 X の部分集合 X_+ は

(i) 閉凸集合で $\{0\} \subsetneqq X_+$,
(ii) $u \in X_+, a \geq 0$ ならば $au \in X_+$,
(iii) $u \in X_+$ かつ $-u \in X_+$ ならば $u = 0$

の3つの条件が成り立つとき**正錐**であるといい，正錐 X_+ を持つノルム空間 X には「$v - u \in X_+$ なるとき $u \leq v$ である」として順序が定まる．このとき X は順序ノルム空間という．$u \leq v$ かつ $u \neq v$ であるとき $u < v$ と表す．$C(I; \mathbb{R})$ における正錐は非負値連続函数の全体である．順序ノル

ム空間において命題1は次のように拡張される．

命題2　正錐 X_+ を持つ順序ノルム空間 X の2つの元 u, v に対し次は同値である．

(1)　$u \leq v$.

(2)　任意の $w \in X_+ \setminus \{0\}$ に対し $u < v + w$.

(3)　任意の $w \in X_+ \setminus \{0\}$ に対し $u \leq v + w$.

(4)　$w_0 \in X_+ \setminus \{0\}$ が存在し，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $u \leq v + \varepsilon w_0$.

3. 不等式による方程式の解の存在証明（完備性に基づくもの）

方程式の解は，多くの場合，何らかの写像の不動点として捉えられる．ベクトル空間 X から X への写像 f に対し $v \in X$ を与えたとき，方程式 $f(u) = v$ を満たす解 $u \in X$ は $g_v(u) = v - f(u) + u$ で定まる写像 $g_v : X \to X$ の不動点に外ならない．常微分方程式や非線型発展方程式の初期値問題の解法の多くは，対応する積分方程式から定まる非線型写像の不動点を求めることに帰着される．写像の不動点の存在を保証する不動点定理は数多く存在するが，最も簡単で応用範囲の広いものはバナッハの不動点定理であろう．

バナッハの不動点定理　(X, d) を（空でない）完備距離空間とする．写像 $f : X \to X$ は縮小写像であるとする．即ち $0 < k < 1$ なる k が存在し，任意の $x, y \in X$ に対し，不等式 $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ が成立するものとする．このとき次が成立する．

(1)　f は唯一つの不動点 $u \in X$ を持つ：$f(u) = u$.

(2)　**（ピカールの逐次近似法）**　$u_0 \in X$ を任意に取り $n \geq 1$ に対し帰納的に $u_n = f(u_{n-1})$ として点列 $\{u_n\}$ を定める．このとき u_n は不動点 u に収束する．特に不等式

$$d(u_n, u) \leq (k^n/(1-k))d(u_1, u_0)$$

が成立する．

典型的な応用例として複素バナッハ空間 X 上の有界一次半写像（第一変数に関し線型で第二変数に関し反線型な写像）$B : X \times X \to X$ に対し $v \in X$ を与えて定まる方程式 $u = v + B(u, u)$ を考える．B の有界性を示す定数を $M = \sup\{\|B(u,v)\|; \|u\|, \|v\| \leq 1\}$ とし，$4M\rho \leq 1$ および $2Mr < 1$ を満たす正数 ρ および r を取ると，$\|v\| \leq \rho$ を満たす任意の $v \in X$ に対し，写像 $u \mapsto v + B(u, u)$ は X の原点を中心とする半径 r の閉球 $B_r(0)$ 上で縮小写像となり唯一つの不動点を持つ．小さなデータに対するナヴィエ・ストークス方程式の初期値問題のスケール不変性を持つ大域解は，このようにして構成される[1,4]．上のようにバナッハ空間 X の閉球 $B_r(0) = \{u \in X; \|u\| \leq r\}$ に距離 $d(u, v) = \|u - v\|$ を導入して完備距離空間 $(B_r(0), d)$ を考えるのは自然であるが，1階のソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上の非線型項 $f(u) = |u|^{p-1}u, 1 < p < 2,$ のように非線型項の滑らかさが弱い場合には，例えば $B_r(0) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n); \|u; H^1(\mathbb{R}^n)\| \leq r\}$ 上に弱い距離 $d(u, v) = \|u - v; L^2(\mathbb{R}^n)\|$ を導入した完備距離空間で議論することもある[5]．

さて，ピカールの逐次近似法における (2) の評価は（近似解）u_n の（真の解）u への収束率を与えている．ここで $k^n = \exp(-(\log(1/k))n)$ であるから収束率は n に関して指数函数的である．

さて，方程式 $f(u) = v$ を満たす解 $u \in X$ は $f_v(u) = f(u) - v$ で定まる $f_v : X \to X$ の零点と考えることもできる．$f_v(u) = u - g_v(u)$ であるからピカールの逐次近似は与えられた $u_0 \in X$ に対し

$$u_n = u_{n-1} - f_v(u_{n-1}) = u_{n-1} - F(u_{n-1})$$

として帰納的に定めたものである．ここでバナッハの不動点定理のところで g_v を f と書き換えたように f_v を F と書き換えている．F が点 u_n で微分可能であれば定義により

$$F(u) - F(u_n) = F'(u_n)(u - u_n) + o(\|u - u_n\|)$$

となるが，u が F の零点であり $F'(u_n) \in B(X)$

（X 上の有界線型作用素全体）が可逆であれば

$$u = u_n - (F'(u_n))^{-1}F(u_n) + o(\|u - u_n\|)$$

となる．右辺の主要項 $u_n - (F'(u_n))^{-1}F(u_n)$ は u_n による次の近似 u_{n+1} を定義しているものとみるのが**ニュートンの逐次近似法**であり $u_0 \in X$ を一つ定めて

$$u_n = u_{n-1} - (F'(u_{n-1}))^{-1}F(u_{n-1})$$

と帰納的に点列 $\{u_n\}$ を定めるスキームである．この近似列は F の零点に速く収束する．実際，次の定理が成り立つ．

ニュートン・カントロビッチの定理　X をバナッハ空間，U を X の開集合，$u_0 \in U, F \in C^1(U;X)$ とし次の (a), (b), (c) を仮定する．

(a)　F の導写像 $F' : U \to B(X)$ はリプシッツ連続である．即ち定数 $L > 0$ が存在して任意の $u, v \in U$ に対し次の評価が成り立つ（この L をリプシッツ定数という）．

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{B(X)} \leq L\|u - v\|.$$

(b)　$F'(u_0) \in B(X)$ は可逆であり，$F'(u_0)^{-1}$ の作用素ノルムと $F'(u_0)^{-1}F(u_0)$ のノルムと F' のリプシッツ定数 L の三者の積は $1/2$ より小さい：

$$\|F'(u_0)^{-1}\|_{B(X)} \leq a,$$
$$\|F'(u_0)^{-1}F(u_0)\| \leq b,$$
$$abL < 1/2.$$

(c)　$t_- \equiv \frac{1-\sqrt{1-2abL}}{aL}$ を半径とする u_0 中心の閉球 $B_{t_-}(u_0)$ は U に含まれる：$B_{t_-}(u_0) \subset U$.

このとき次が成り立つ．

(1)　**（解の存在と一意性）**　方程式 $F(u) = 0$ は $u \in B_{t_-}(u_0)$ なる唯一つの解を持つ．

(2)　**（ニュートン近似列の収束率）**　$k = 1 - \sqrt{1-2abL}$ とすると任意の $n \geq 0$ に対し次の評価が成り立つ．

$$\|u_n - u\| \leq \frac{k^{2^n}}{2^n aL}.$$

ニュートンの逐次近似法における (2) の評価は（近似解）u_n の（真の解）u への収束率を与えている．ここで

$$k^{2^n}/2^n = \exp(-(\log(1/k))\exp((\log 2)n) - (\log 2)n)$$

であるから収束率は n に関して二重指数函数的である．これは等式

$$u_{n+1} - u_n = -(F'(u_n))^{-1}F(u_n)$$
$$= -(F'(u_n))^{-1}(F(u_n) - F(u_{n-1}) - F'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1}))$$

により $\|u_{n+1} - u_n\|$ が $\|u_n - u_{n-1}\|^2$ で評価されることから従う．条件 (b) および (c) は，第 0 近似 u_0 を適切に選ぶことを要求しており，バナッハの不動点定理と異なるところである．

微分幾何学に登場するような非線型楕円型方程式は，非線型項が「微分の損失」を起こす典型的な例である．この現象は，F が同じ空間 X 内の写像とならず，バナッハ空間の減少列 $\{X_k\}$ の X_k から広い X_{k-l} への写像となっていることに対応する．例えば X_k を $\mathbb{R}^n$ 上の k 階ソボレフ空間 $H^k(\mathbb{R}^n)$ であるとして F は H^k から H^{k-l} への写像としてしか意味を持たないという状況では，F の微分の損失の階数は l となる．そのような場合，ナッシュ・モーザーの逐次近似法が有効に働くことがある．これは，ニュートンの逐次近似法の非線型部分に平滑化作用素を組み込んだスキームであり，平滑性はバナッハ空間 X_k を狭い空間 X_{k+m} に一定の作用素ノルムを伴う形で定式化される．バナッハ空間の列 $\{X_k\}$ において，「微分の損失」と「平滑化」との間に，ニュートン近似の持つ二重指数函数的収束率を基礎として均衡を見出し，近似列の収束を図ろうとするのがナッシュ・モーザーの逐次近似法の考え方である（詳しくは文献 3) を参照）．

4. 不等式による方程式の解の存在証明（点列コンパクト性に基づくもの）

前節のバナッハの不動点定理の初等的応用例と

して，一階常微分方程式 $u'(t) = N(t, u(t))$ の初期値問題の基礎定理がある．ここで基礎となる空間は実数全体 $\mathbb{R}$ でもバナッハ空間 X に一般化しても本質的には変わらないが，非線型項 N は（第一変数について一様に）第二変数についてリプシッツ条件を満たすものとする．初期時刻 t_0 における初期条件を $u(t_0) = a$ とすると対応する積分方程式は $u(t) = a + \int_{t_0}^{t} N(s, u(s))ds$ となり，右辺を $(f(u))(t)$ と表すことにすれば，問題は $f : u \mapsto f(u)$ の不動点を求めることに帰着される．ここで写像 f の縮小性は，対象とする時間幅をリプシッツ定数に応じて局所化することにより実現される．リプシッツ性が保証されない場合には，解の一意性は一般に破綻する．一方，N の連続性だけでも解の存在は保証される（ペアノの定理）．その議論の本質は，近似解の成す列の（等連続性と一様有界性に基づく）相対点列コンパクト性にある（アスコリ・アルツェラの定理）．本節では，コンパクト性が本質的に働く，方程式の解の存在証明について述べよう．コンパクト性は有限性や有界性と密接に関連しており，ここでも不等式が重要な鍵となる．

ノルム空間 X の部分集合 M からノルム空間 Y への連続写像 f は M の有界部分集合を Y の相対コンパクト部分集合に写すとき**コンパクト写像**であるという．コンパクト写像に関する不動点定理では次が基本的である．

シャウダーの不動点定理　X をバナッハ空間，$M \subset X$ を（空でない）有界閉凸部分集合，$f : M \to X$ を $f(M) \subset M$ なるコンパクト写像とする．このとき f は少なくとも一つの不動点を持つ．

シャウダーの不動点定理は（$X = \mathbb{R}^n$ の有界閉凸部分集合からそれ自身への連続写像の不動点の存在を主張する）ブラウワーの不動点定理の一般化となっている．無限次元ノルム空間においては単位球体はもはやコンパクトではない（リースの定理）ので，コンパクト写像という概念それ自身が重要となっている．証明の基本方針は，X の有限次元部分空間に値域を持つコンパクト写像の列 $\{f_n\}$ で f に M 上一様収束するものを構成し，ブラウワーの定理によって与えられる f_n の不動点 u_n を取り，$\{u_n\}$ の有界性と f のコンパクト性に基づき収束部分列の極限として不動点を得ることである．

シャウダーの不動点定理の系として得られる次の定理は，非線型偏微分方程式の解の存在証明に応用し易い形となっている．

シェファの不動点定理　X をバナッハ空間，$f : X \to X$ をコンパクト写像とする．次の条件 (A) の下で f は少なくとも一つの不動点を持つ．
(A) 次のような $r > 0$ が存在する：

$$\bigcup_{0 \le t < 1} \{u \in X ; u = tf(u)\} \subset B_r(0)$$

（証明）　$\rho > r$ に対し $B_\rho(0)$ 上の連続写像 g が

$$g(u) = \begin{cases} f(u) & (\|f(u)\| \le \rho \text{ の場合}), \\ \rho f(u)/\|f(u)\| & (\|f(u)\| \ge \rho \text{ の場合}) \end{cases}$$

で定まる．f のコンパクト性より g のコンパクト性が従い，シャウダーの不動点定理より g は不動点 $u \in B_\rho(0)$ を持つ．さて $\|f(u)\| \le \rho$ なる u は f の不動点である．一方 $\|f(u)\| > \rho$ なら $t = \rho/\|f(u)\|$ とおくと $0 < t < 1$ であり $u = g(u) = tf(u)$ となるから (A) により $u \in B_r(0)$ が従う．これより $\rho = t\|f(u)\| = \|g(u)\| = \|u\| \le r$ となり矛盾を得る．即ち $\|f(u)\| > \rho$ の場合は起こらない．

条件 (A) は「解が存在すると仮定すれば，その解はすべて特定の不等式を満たす」というアプリオリ評価の形を取っている．シェファの不動点定理では，アプリオリ評価が解の存在を保障しているのであり，ここに不等式の果たす本質的役割を明確に見出すことができる．

5. 不等式による方程式の解の存在証明（順序構造と点列コンパクト性に基づくもの）

第 3 節の初めに $f(u) = v$ なる方程式を考えたが，この形の問題が微分積分学の最初に現れる

のは中間値の定理であろう．この場合 f は区間 $I=[a,b]$ 上の実数値連続函数であり，v を与えて $f(u)=v$ なる $u\in I$ を求めることが問題となる．簡単のため $f(a)\le v\le f(b)$ とする．中間値の定理の証明のうち二分法による議論は，点列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ で $f(a_n)\le v\le f(b_n)$,

$$a=a_0<a_1<\cdots<a_n$$
$$<b_n<\cdots<b_1<b_0=b,$$

$b_n-a_n=2^{-n}(b-a)\to 0$ なるものの構成を基礎としており $u\in I$ はそれら 2 つの点列の共通の極限として与えられる．さて方程式 $f(u)=v$ に対して a はその劣解 $f(a)\le v$ であり b は優解 $f(b)\ge v$ と見做すことができ，中間値の定理とは「劣解と優解を繋いだ区間における解の存在定理」と捉えることができる．本節ではこの考え方を順序バナッハ空間において定式化しよう．実ノルム空間 X の正錐 X_+ が**正規**であるとは定数 $c>0$ が存在し $0\le u\le v$ なる任意の $u,v\in X$ に対して不等式 $\|u\|\le c\,\|v\|$ が成り立つことをいう．順序ノルム空間 X における写像 $f\colon X\to X$ は「$u\le v$ なら $f(u)\le f(v)$」なる条件を満たすとき**単調**であるという．

命題 3　X を正規な正錐 X_+ を持つ実バナッハ空間とし $f\colon[u_0,v_0]\to X$ を単調なコンパクト写像とする．ここで $u_0,v_0\in X$ は $u_0\le v_0$ を満たすものとし，$[u_0,v_0]=\{u\in X; u_0\le u\le v_0\}$ とする．また u_0 および v_0 は方程式 $f(u)=u$ のそれぞれ劣解および優解であるとする：

$$u_0\le f(u_0),\ f(v_0)\le v_0.$$

このとき $u_n=f(u_{n-1}), v_n=f(v_{n-1})$ で帰納的に定まる点列 $\{u_n\},\{v_n\}$ は

$$u_0\le u_1\le\cdots\le u_n\le v_n\le\cdots\le v_1\le v_0$$

を満たし，それぞれ唯一つの u_- および u_+ に収束する．$u_\pm$ は $u_-\le u_+$, $f(u_\pm)=u_\pm$ を満たす．

(証明)　f の単調性より $u_0\le u_1\le v_1\le v_0$ が従い，同様に $u_{n-1}\le u_n\le v_n\le v_{n-1}$ が帰納的に従う．$0\le v_n-u_0\le v_0-u_0$ より

$\|v_n\| \le \|v_n - u_0\| + \|u_0\| \le c\|v_0 - u_0\| + \|u_0\|$ となり $\{v_n\}$ は $[u_0, v_0]$ における有界列となる．f のコンパクト性より $u_+ \in X$ および部分列 $\{u_{n_j}\} \subset \{v_n\}$ が存在し $f(u_{n_j}) \to u_+$ となる．このとき $u_+ \le \cdots \le v_{n_j} \le \cdots \le v_{n_2} \le v_{n_1} \le v_0$ より $\{v_n\}$ はコーシー列を成すことが従うので $\{v_n\}$ 自身が u_+ に収束していることが分かる．f の連続性により u_+ は f の不動点となる．u_- についての証明も同様．

命題 3 において，劣解および優解における不等号が，中間値の定理の説明の対応する不等号とそれぞれ逆向きである理由は，第 3 節の初めの記法に従えば $f(u) \le v \Leftrightarrow g_v(u) \le u$ および $f(u) \ge v \Leftrightarrow g_v(u) \le u$ であるからである．

6. 不等式による方程式の解の存在証明（ヒルベルト構造に基づくもの）

保存力の下でのニュートンの運動方程式，マックスウェルの方程式系，シュレディンガー方程式など，物理学の多くの基礎方程式は，対応するラグランジアンの最小化問題として定式化される．数学でも，リーマンの写像定理のディリクレ原理による証明に端を発する幾何学的函数論や，非線型解析の根幹である変分解析学に見られるように，最小化問題は，様々な理論体系の基礎を成している．本節では，ポテンシャルエネルギーが運動エネルギーの線型摂動として働く場合のディリクレ原理を，ヒルベルト空間の枠組みで定式化しよう．

H を内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つ複素ヒルベルト空間とし $X \ni u \mapsto \|u\| = \sqrt{(u,u)} \in \mathbb{R}$ を自然なノルムとする．H 上の一次半形式とは $H \times H$ から $\mathbb{C}$ への写像で，第一変数に関し線型で第二変数に関し反線型であるものをいう．一次半形式 a が**有界**であるとは定数 $C > 0$ が存在し任意の $u, v \in H$ に対し不等式 $|a(u,v)| \le C\|u\|\|v\|$ が成り立つことと定義し，**強圧的**であるとは定数 $\delta > 0$ が存在し任意の $u \in H$ に対し不等式 $\mathrm{Re}\ a(u,u) \ge \delta\|u\|^2$ が成り立つことと定義する．また a が**エルミート対称**であるとは任意の $u, v \in H$ に対し等式 $\overline{a(u,v)} = a(v,u)$ が成り立つことと定義する．H 上の有界線型形式（汎函数）全体の成すバナッハ空間 $H' = B(H;\mathbb{C})$ を H の双対空間という．

命題 4　次の同値な命題が成り立つ．

(1)（**ディリクレ原理**）H 上の任意の有界強圧的エルミート対称一次半形式 a および任意の $f \in H'$ に対し $u \in H$ が唯一つ存在して等式

$$\inf\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \mathrm{Re}\ f(v); v \in H\right\} = \frac{1}{2}a(u,u) - \mathrm{Re}\ f(u),$$

および $a(u,u) = \mathrm{Re}\ f(u)$ が成り立つ．

(2)（**直交分解**）H の任意の閉部分空間 M は直交補空間 $M^\perp$ を持つ．

(3)（**リースの表現定理**）任意の $f \in H'$ に対し $u \in H$ が唯一つ存在して任意の $v \in H$ に対し等式 $f(v) = (v,u)$ が成り立つ．

(4)（**ラックス・ミルグラムの定理その 1**）H 上の任意の有界強圧的一次半形式 a および任意の $f \in H'$ に対し $u \in H$ が唯一つ存在し任意の $v \in H$ に対し $a(v,u) = f(v)$ が成り立つ．

(5)（**ラックス・ミルグラムの定理その 2**）(4) において a を有界強圧的エルミート対称一次半形式に制限したものが成り立つ．

（証明） (1) $\Rightarrow$ (2)：$u \in H$ を一つ与えて $v, w \in M$ に対し $a(v,w) = (v,w)$ および $f(v) = (v,u)$ とおけば a はヒルベルト空間 M 上の有界強圧的エルミート対称一次半形式であり $f \in M'$ と見做すことができる．このとき (1) より $M \ni v \mapsto \frac{1}{2}a(v,v) - \mathrm{Re}\ f(v) \in \mathbb{R}$ の最小化を与える $v_0 \in M$ が唯一つ存在し，v_0 は $M \ni v \mapsto \|u - v\|^2 \in \mathbb{R}$ の最小化を与える．$w \in M, t \in \mathbb{R}$ に対し $v_0 + tw \in M$ を考えることにより $\mathrm{Re}\ (u - v_0, w) = 0$ を得て $w \in M$ の代りに $iw \in M$ として $\mathrm{Im}\ (u - v_0, w) = 0$ を得る．よって $u = v_0 + (u - v_0) \in M \oplus M^\perp$ が従う．

(2) $\Rightarrow$ (3)：$M = \mathrm{Ker} f$ とすれば良い．

(3) $\Rightarrow$ (4)：$u \in H$ を与えて写像 $H \ni v \mapsto a(v,u)$

$\in \mathbb{C}$ を考える．これは H' の元となるので (3) により $Au \in H$ が唯一つ定まり任意の $v \in H$ に対し等式 $a(v,u) = (v, Au)$ が成り立つ．写像 $A : H \ni u \mapsto Au \in H$ は有界線型となる．一方，与えられた $f \in H'$ に対し (3) により $w \in H$ が唯一つ定まり任意の $v \in H$ に対し等式 $(v,w) = f(v)$ が成り立つ．そこで A が全単射であることを示せば f から w が定まり，w から $Au = w$ なる u が唯一つ定まり等式 $a(v,u) = (v,Au) = (v,w) = f(v)$ が任意の $v \in H$ に対し成り立つことになり (4) が従う．A の全単射性は，与えられた w に対し写像 $\Phi_t : H \ni u \mapsto u - t(Au - w) \in H$ $(0 < t < 2\delta/C^2)$ が縮小写像であることから従う．

(4) ⇒ (5)：(5) は (4) の特殊な場合である．

(5) ⇒ (1)：$u, v \in H$ に対し $\langle u, v \rangle = a(u,v)$ とすると H 上の内積が定まる．対応するヒルベルト空間を H_a と表す．f は H'_a の元となり (5)（の特別な場合である (3)）より $u \in H_a$ が唯一つ存在して任意の $v \in H_a$ に対し等式 $f(v) = \langle v, u \rangle$ が成り立つ．このとき $a(v,v) - 2\mathrm{Re}\ f(v) = \langle v-u, v-u \rangle - \langle u, u \rangle$ が成り立つ．右辺は $v = u$ の場合に限り最小値 $-\langle u,u \rangle = -a(u,u)$ を取る．これより (1) が従う．

さて (2) は $u \notin M$ に対する $M \ni v \mapsto \|u - v\| \in \mathbb{R}$ の最小化問題に帰着され，その最小化を与える元 $v \in M$ の存在は H のヒルベルト構造，即ち中線定理と完備性により保障される．

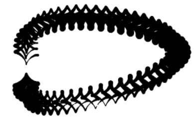
参考文献

1) H. Fujita, T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, *Arch. Rational Mech. Anal.* **16** (1964), 269–315.
2) M. Giaquinta, G. Modica, *Mathematical Analysis. Linear and metric structures and continuity*, Birkhäuser (2007), xx+465pp.
3) R.S. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, *Bull. AMS* **7** (1982), 65–222.
4) T. Kato, Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in R^m, with applications to weak solutions, *Math. Z.* **187** (1984), 471–480.
5) T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, *Ann. IHP, Phys. Théor.* **46** (1987), 113–129.
6) E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Springer-Verlag (1986), xxi+897pp.

（おざわ・とおる，早稲田大学理工学術院）

微分方程式の適切性

解の存在と一意性が意味するところ



小薗　英雄

1. 常微分方程式

ニュートンは微分積分学を確立することによって古典力学の数学的な体系を構築した．実際，運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2}$ と万有引力の法則 $\boldsymbol{F} = -GMm\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}$ よって，ケプラーの惑星に関する 3 つの法則を数学の力を用いて完全に解明した．ここで，$\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ は時刻 t における質点の座標，m, M はそれぞれ惑星と太陽の質量を表し，$r = |\boldsymbol{x}|$ である．このニュートンの法則によって，多くの物理現象の解明は微分方程式を解くことに帰着されることとなった．一方，数学では物理学とは独立に微分方程式自身を研究対象とし，解の存在や一意性を議論してきた．例えば，連立常微分方程式系の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), \cdots, x_n(t), t), \\ x_i(\tau) = \xi_i, \quad i = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{E}$$

を考える．ここで，$f_i = f_i(\boldsymbol{x}, t)$, $i = 1, \cdots, n$ は $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ の領域 D で定義された連続関数であり，変数 $\boldsymbol{x}$ に関してリプシッツ条件

$$|f_i(\boldsymbol{x}, t) - f_i(\boldsymbol{y}, t)| \le L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \quad i = 1, \cdots, n \tag{1.1}$$

をすべての $(\boldsymbol{x}, t) \in D$, $(\boldsymbol{y}, t) \in D$ に対して満たすとする．ただし, L は正定数である．この条件の下, 任意に与えられた $(\boldsymbol{\xi}, \tau) = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \tau) \in D$ に対して, $t = \tau$ の近傍で定義された (E) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が存在して，かつ一意的であることが知られている．実際，$D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は領域であるから，$\rho > 0, \alpha > 0$ を十分小さくとれば，集合 $V_{\rho,\alpha}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \equiv \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| \le \rho, |t - \tau| \le \alpha\} \subset D$ とできる．このとき，閉区間 $I_{\alpha_1}(\tau) \equiv [\tau - \alpha_1, \tau + \alpha_1]$ に対して，$x_i \in C^1(I_{\alpha_1}(\tau))$, $i = 1, \cdots, n$, $\{(\boldsymbol{x}(t), t); t \in I_{\alpha_1}(\tau)\} \subset D$ なる (E) の一意的な解 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ が存在する．ここで，α_1 は局所存在時間と呼ばれ，$\alpha_1 = \mathrm{Min.}\{\alpha, \rho/M\}$, $M \equiv \mathrm{Max.}\{|f_i(\boldsymbol{x}, t)|; (\boldsymbol{x}, t) \in D, i = 1, \cdots, n\}$ で与えられる．これがよく知られた常微分方程式系の初期値問題の**解の局所一意存在定理**である．

解の存在については，所謂ピカールの逐次近似法によって証明がなされる*1)．またその解の一意性については，グロンウォールの不等式*2)を用いる．実際，$x_i(t)$, $i = 1, \cdots, n$ は (E) の $t \in I_{\alpha_1}(\tau)$ における解であるから，積分方程式

$$x_i(t) = \xi_i + \int_\tau^t f_i(\boldsymbol{x}(s), s)ds, \quad t \in I_{\alpha_1}(\tau), \quad i = 1, \cdots, n \tag{1.2}$$

に従う．$y_i \in C^1(I_{\alpha_1}(\tau))$, $i = 1, \cdots, n$ を (E) のもう一つの解とするとき，必要であれば，$0 < \alpha_2 \le \alpha_1$ を十分小さくとることにより，$(\boldsymbol{y}(t), t) = (y_1(t), \cdots, y_n(t)), t) \in V_{\rho,\alpha}(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ がすべての $t \in I_{\alpha_2}(\tau)$ に対して成り立つとしてよい．このとき, $v(t) \equiv |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)|$ とおけば，リプシッツ条件 (1.1) より

$$v(t) \le L \int_\tau^t v(s)ds, \quad t \in I_{\alpha_2}(\tau)$$

が従う．ゆえにグロンウォールの不等式により, $v(t) = 0$，すなわち，$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$ がすべての $t \in I_{\alpha_2}(\tau)$ に対して成り立つ．同様な議論を $\tau + \alpha_2 < t \le \tau + \alpha_1$

*1) 積分方程式 (1.2) の近似解列として，$\boldsymbol{x}_0(t) \equiv \boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{x}_m(t) = \boldsymbol{x}_0(t) + \int_\tau^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{m-1}(s), s)ds$, $m = 1, 2, \cdots$ なるものを考え，$\{\boldsymbol{x}_m(t)\}_{m=0}^\infty$ が $I_{\alpha_1}(\tau)$ 上の一様収束列であることを証明する．

*2) $h = h(t) \in C([\alpha, \beta))$, $h(t) \ge 0$ とする．$v = v(t) \in C([\alpha, \beta))$ が不等式 $v(t) \le C + \int_\alpha^t h(s)v(s)ds$, $\alpha \le t < \beta$（C は定数）を満たすならば，$v(t) \le C\exp(\int_\alpha^t v(s)ds)$, $\alpha \le t < \beta$ が成り立つ．

および $\tau-\alpha_1 \le t < \tau-\alpha_2$ へと適用すれば，結局，$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{y}(t), t \in I_{\alpha_1}(\tau)$ を得る．

さらに，初期値に対する**解の連続性**を考えよう．$\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_n) \in \mathbb{R}^n$ を $|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}|<\rho/2$ となるように選ぶ．このとき，$V_{\rho/2,\alpha}(\boldsymbol{\eta},\tau) \subset D$ であるから，上の議論から

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt}=f_i(x_1(t),\cdots,x_n(t),t), \quad t \in I_{\alpha_*}(\tau), \\ x_i(\tau)=\eta_i, \quad i=1,\cdots,n \end{cases}$$

を満たす C^1-級の解が区間 $I_{\alpha_*}(\tau)$ 上で一意的に存在する．ここで，$\alpha_*=\mathrm{Min.}\{\rho/2M,\alpha\}$ である．この解を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta})$ と書くことにする．このような (E) の解の存在とその一意性によって，初期値から解への写像

$$\boldsymbol{\eta} \in B_{\rho/2}(\boldsymbol{\xi}) \mapsto \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta}) \in C^1(I_{\alpha_*}(\tau)) \quad (1.3)$$

が定義できる．ただし，$B_R(\boldsymbol{\xi}) \equiv \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n; |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}|<R\}$．この写像は連続である．実際，(1.2) と同様に $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta})$ は，積分方程式

$$\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\eta}+\int_\tau^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{\eta}),s)ds, \quad t \in I_{\alpha_*}(\tau)$$

を満たしているから，もう一つの $\boldsymbol{\eta}' \in B_{\rho/2}(\boldsymbol{\xi})$ をとるとき，リプシッツ条件 (1.1) から

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta}')| \\ &\le |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}'|+\int_\tau^t |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{\eta}),s)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{\eta}'),s)|ds \\ &\le |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}'|+L\int_\tau^t |\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{\eta}')|ds \end{aligned}$$

がすべての $t \in I_{\alpha_*}(\tau)$ に対して成り立つ．ゆえにグロンウォールの不等式から

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta}')| \\ &\le |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}'|\exp\left(L\int_\tau^t ds\right) \\ &\le |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}'|\exp(L\alpha_*), \quad \forall t \in I_{\alpha_*}(\tau) \qquad (1.4) \end{aligned}$$

が従う．さらに導関数についても，リプシッツ条件と (1.4) から

$$\begin{aligned} &\left|\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta})-\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta}')\right| \\ &=|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta}),t)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta}'),t)| \\ &\le L|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\eta}')| \\ &\le L|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}'|\exp(L\alpha_*), \quad \forall t \in I_{\alpha_*}(\tau) \qquad (1.5) \end{aligned}$$

が成り立つ．(1.4), (1.5) から

$$\|\boldsymbol{x}(\cdot,\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{x}(\cdot,\boldsymbol{\eta}')\|_{C^1(I_{\alpha_*}(\tau))} \le (L+1)e^{L\alpha_*}|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}'|$$

を得る[*3)]．上式から，(1.3) によって定義される写像は，$B_{\rho/2}(\boldsymbol{\xi})$ から $C^1(I_{\alpha_*}(\tau))$ への連続写像であることが分かる．このように，常微分方程式系の初期値問題 (E) に関しては，ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ が領域 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で変数 $\boldsymbol{x}$ についてリプシッツ条件を満たしていれば初期値問題の解が時間局所的に一意に存在し，かつ初期値に関して連続的に振る舞うことが分かる．なお，リプシッツ条件を仮定せず，単に $\boldsymbol{f}$ が D 上の連続関数である場合は，コーシー–ペアノの折れ線近似により，C^1-級の解の局所存在は得られている．一意性に関しては簡単な反例[*4)]がある．

2. 偏微分方程式

前節では常微分方程式系の初期値問題に対しては，局所的に一意的な解が求まり，かつその解は初期値に対して連続的に振る舞うことが明らかにされた．ところが，偏微分方程式については，状況は異なる．この節では，反例を挙げながら偏微分方程式の初期値問題の特徴を見よう．まずは，有名なコーシー–コワレフスキーの定理から述べる．$(\boldsymbol{x},t)=(x_1,\cdots,x_n,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ を独立変数とし，N 個の未知関数 $u_1(\boldsymbol{x},t),\cdots,u_N(\boldsymbol{x},t)$ に対する次の連立線形偏微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{m_j} u_j(\boldsymbol{x},t) \\ +\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|+k\le m_j, k\le m_j-1} a^j_{\alpha,k,l}(\boldsymbol{x},t) \\ \quad \times\left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{k} u_l(\boldsymbol{x},t)=f_j(\boldsymbol{x},t), \qquad (2.1) \\ u_j(\boldsymbol{x},0)=\varphi^0_j(\boldsymbol{x}), \\ \cdots,\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{m_j-1} u_j(\boldsymbol{x},0)=\varphi^{m_j-1}_j(\boldsymbol{x}), \\ j=1,\cdots,N. \end{cases}$$

ここで，$f_1(\boldsymbol{x},t),\cdots,f_N(\boldsymbol{x},t)$ は $(\boldsymbol{x},t)$-空間の原点 $(\mathbf{0},0)$ の近傍 U で定義された関数であり，$\Phi_j(\boldsymbol{x}) \equiv (\varphi^0_j(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi^{m_j-1}_j(\boldsymbol{x}))$, $j=1,\cdots,N$ は $\boldsymbol{x}$-空間の原点 $\mathbf{0}$ の近傍 V で定義されたベクトル値関数であり，共に与えられたデータである．また，n-多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に対して，$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$,

*3) 一般に，有界閉区間 $I \subset \mathbb{R}$, $f \in C^m(I)$, $m=0,1,2,\cdot$ に対して，$\|f\|_{C^m(I)}=\sum_{k=0}^m \sup_{t\in I}\left|\frac{d^k}{dt^k}f(t)\right|$ によりノルムが定義され，これによって $C^m(I)$ はバナッハ空間となる．

*4) $n=1$, $f_1(x_1,t)=x_1^{\frac{2}{3}}$, $\tau=0$, $\xi_1=0$ とすれば，$x_1(t)\equiv 0$, $x_1(t)=3^{-3}t^3$ は共に (E) の解である．

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ である．連立系 (2.1) の第一式の左辺は正規系の偏微分作用素と呼ばれ，その独立変数 t は次のような特別な意味をもっている．すなわち，各未知関数 $u_j(\boldsymbol{x}, t)$ の変数 t に関する偏導関数の最高階数は m_j であり，その他の変数 $(\boldsymbol{x}, t)$ に関する偏導関数の階数は m_j を超えず，かつ $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_j} u_j$ について解いた形になっている．

次の定理は連立系 (2.1) に関する初期値問題の可解性についての基本的な結果であり，コーシー–コワレフスキーの定理と呼ばれている．

定理 2.1 正規系の偏微分作用素 (2.1) の係数 $a^j_{\alpha,k,l}(\boldsymbol{x}, t)$, $|\alpha| + k \leq m_j$, $k \leq m_j - 1$ はすべての $l, j = 1, \cdots, N$ に対して，$(\boldsymbol{x}, t)$-空間の原点の近傍 U で定義され，かつ解析的[*5] であるとする．また与えられたデータ $f_1(\boldsymbol{x}, t), \cdots, f_N(\boldsymbol{x}, t)$ も U で解析的であり，$\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x}) = (\varphi^0_j(\boldsymbol{x}), \cdots, \varphi^{m_j-1}_j(\boldsymbol{x}))$, $j = 1, \cdots, N$ は $\boldsymbol{x}$-空間の原点の近傍 V で定義された解析的な初期値とする．このとき，$(\boldsymbol{x}, t)$-空間の原点の近傍 W と $(\boldsymbol{x}, t) \in W$ で定義された (2.1) の解析的な解 $u_1(\boldsymbol{x}, t), \cdots, u_N(\boldsymbol{x}, t)$ が存在して，かつ一意的である．

証明方法の概略を述べよう．解 $u_j(\boldsymbol{x}, t)$, $j = 1, \cdots, N$ が原点の近傍で解析的であると仮定して，

$$\begin{aligned} u_j(\boldsymbol{x}, t) &= \sum_{\alpha, k} b^j_{\alpha,k} \boldsymbol{x}^\alpha t^k \\ &= \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, k=0}^{\infty} b^j_{\alpha_1 \cdots \alpha_n k} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} t^k \end{aligned} \tag{2.2}$$

とべき級数で展開できたとする．仮定から，偏微分作用素の係数 $a^j_{\alpha,k,l}(\boldsymbol{x}, t)$ および与えられたデータ $f_j(\boldsymbol{x}, t)$ と初期条件 $\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x})$ は，それぞれ $(\boldsymbol{x}, t) \in U$, $\boldsymbol{x} \in V$ のべき級数で展開できるから，連立系 (2.1) を用いて両辺の $\boldsymbol{x}^\alpha t^k$ 各項の係数を比較することにより，係数 $b^j_{\alpha,k}$ を帰納的に求めることができる．そのように定めた係数をもつべき級数 (2.2) の収束を優級数法と呼ばれる方法を用いて証明する．

さて定理 2.1 は解析的な関数の範囲では，初期値問題 (2.1) は局所一意的に可解であることを示している．それでは，“解析的” という仮定を外した場合，例えば C^∞-級関数の範囲で定理 2.1 と同様な結果を得ることができるか？といった問題を考えよう．その問に関しては，次のアダマールによる反例がある．$N = 1$ として，ラプラス方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0, \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = \varphi^0(\boldsymbol{x}), \quad \dfrac{\partial}{\partial t} u(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

を原点を中心とする開球 $B_\delta \equiv \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sqrt{|\boldsymbol{x}|^2 + |t|^2} < \delta\}$ で考える．定理 2.1 によれば，φ^0 が $\boldsymbol{x}$-空間の原点のある近傍で解析的であれば，ある $\delta > 0$ と B_δ で定義された一意的な解析関数 $u(\boldsymbol{x}, t)$ が存在して (2.3) を満たす．いま，$\varphi^0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を与えたとき，ある $\delta > 0$ に対して $u \in C^2(B_\delta)$ なる (2.3) の解が存在したとする．よく知られているように，開集合上の調和関数は解析的[*6] であるから，u は必然的に B_δ 上の解析関数となる．従って，φ^0 として，特に原点のいかなる近傍をとっても解析的ではない関数を初期値として選べば，任意の $\delta > 0$ に対して，$u \in C^2(B_\delta)$ なる (2.1) の解は存在しない．このことは (2.1) の解 u の意味を，$f_j \in C^\infty(U)$, $\boldsymbol{\Phi}_j \in C^\infty(V)$ に対して，ある $\delta > 0$ と $u_j \in C^{m_j}(B_\delta \cap \{t > 0\}) \cap C^{m_j - 1}(B_\delta \cap \{t \geq 0\})$, $j = 1, \cdots, N$ なる関数が存在して (2.1) を満たす，と広義に解釈しても同様に解の非存在が示せる．実際，(2.3) に対して，$u \in C^2(B_\delta \cap \{t > 0\}) \cap C^1(B_\delta \cap \{t \geq 0\})$ なる解が存在したならば，

$$\tilde{u}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} u(\boldsymbol{x}, t) & (\boldsymbol{x}, t) \in B_\delta, \quad t \geq 0 \text{ のとき} \\ u(\boldsymbol{x}, -t) & (\boldsymbol{x}, t) \in B_\delta, \quad t < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すれば，鏡像の原理から $\tilde{u}$ は B_δ 上の調和関数となり[*7]，上の議論と同様にその $\{t = 0\}$ への制限 $\tilde{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \varphi^0(\boldsymbol{x})$ は $|\boldsymbol{x}| < \delta$ において解析的でなけれ

---

*5) $g = g(\boldsymbol{x}, t)$ が U で**解析的**であるとは，任意の $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in U$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| + |t - t_0| < \delta$ であれば，収束するべき級数 $g(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{\alpha,k} b_{\alpha,k} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^\alpha (t - t_0)^k = \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, k=0}^{\infty} b_{\alpha_1 \cdots \alpha_n k} (x_1 - x_{0,1})^{\alpha_1} \cdots (x_n - x_{0,n})^{\alpha_n} (t - t_0)^k$ に展開できることである．

*6) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ領域とするとき，Ω 上の調和関数 u は

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_y} \Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) u(\boldsymbol{y}) - \Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \nu_y} \right) dS_y,$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \Omega$$

と表せる．ここで，ν は $\partial\Omega$ 上の単位外向き法線ベクトルであり，dS は $\partial\Omega$ の面素である．

*7)

$$\int_{B_\delta} \tilde{u}(\boldsymbol{x}, t) \Delta_{x,t} \varphi(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} dt = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B_\delta)$$

が成り立つことからも，$\tilde{u}$ が B_δ 上の調和関数であることが従う．ここで，$\Delta_{x,t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

ばならない．

さて次に連立系 (2.1) の解の初期値に対しての連続依存性を考察しよう．以下の反例もアダマールによる．$N=n=1$ とする．ラプラス方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \\ u(x,t)=\dfrac{1}{m^\gamma}\sin mx, \quad \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0)=0 \end{cases} \tag{2.4}$$

を考える．ここで，$m=1,2,\cdots,\gamma>0$ である．(2.4) は解析的な解 $u_m(x,t)=\frac{1}{m^\gamma}\sin mx\cosh mx$ をもつ．定理 2.1 によれば，このような解は一意的でありそれ以外にはない．ここで初期値 $u_m(x,0)$, $\frac{\partial}{\partial t}u_m(x,0)$ に関しては，$m\to\infty$ のとき $x\in(-\infty,\infty)$ に関して一様にゼロに収束する．その極限関数を初期値にもつ (2.4) の解は明らかに $u_0(x,t)\equiv 0$ である．しかるに，容易に示されるように，任意の $\delta>0$, $\alpha,k=0,1,\cdots$ に対して $\sup_{(x,t)\in B_\delta}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k u_m(x,t)\right|\to\infty$ が $m\to\infty$ のとき成り立つ．さらに，与えられた任意の $\beta,l=0,1,2,\cdots$ に対して γ を十分大きく選べば，$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l u_m(x,0)\to 0$, $m\to\infty$ であるにも関わらず，$u_m(x,t)$ の値は $t>0$ であればゼロに収束しないようにできる．このことは，(2.1) に関して初期値に関する解の連続性[*8)]が一般には成り立たないことを示している．

このように偏微分方程式の初期値問題は，たとえ線形方程式であっても，常微分方程式のときのような解の一意局所存在定理や初期値に関する連続依存性がもはや成り立たないのである．アダマールは任意の初期値を与えたとき，解が一意的に存在かつ初期値に対して連続的に振る舞うとき，その方程式の初期値問題は**適切**であると命名した．

3. ナヴィエ–ストークス方程式の初期値問題の局所適切性・非適切性

前節では正規形連立線形偏微分方程式の初期値問題の適切性を論じた．これらは，1960 年代半ば頃に盛んに研究されたテーマではあるが，その問題意識は今日の非線形偏微分方程式の研究に対しても強い影響を与えている．本節では，非線形偏微分方程式の典型として，非圧縮性粘性流体の運動を記述するナヴィエ–ストークス方程式を取り上げ，その初期値問題の局所適切性に関する最近の結果を紹介しよう．「ナヴィエ–ストークス方程式の任意の初期値に対する正則解の時間大域的な存在問題」は，2000 年にアメリカのクレイ研究所によって次の千年（ミレニアム）に取り組むべき数学の 7 つの未解決問題の一つとして提唱されているが，今日も依然として多くの研究者を悩ませ続けている．

ここでは簡単のため，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 全体で考える．$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=(u_1(\boldsymbol{x},t),u_2(\boldsymbol{x},t),u_3(\boldsymbol{x},t))$, $p=p(\boldsymbol{x},t)$ をそれぞれ，座標 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$，時刻 $t>0$ における流体の速度ベクトルと圧力とする．このとき，$\{\boldsymbol{u},p\}$ はナヴィエ–ストークス方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}-\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla p=0, \\ \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3, 0<t<T, \\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}=0, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3, 0<t<T, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0}=\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{N-S}$$

に従う．ここで $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})=(a_1(\boldsymbol{x}),a_2(\boldsymbol{x}),a_3(\boldsymbol{x}))$ は初期速度ベクトルである．さて，時刻 $t=0$ で初期値 $\boldsymbol{a}$ を与えたとき，ある $T>0$ が存在して，(N-S) は $t\in(0,T)$ で定義された解 $\{\boldsymbol{u}(t),p(t)\}$ を一意的に有するか？ また $\{\boldsymbol{v},q\}$ をいま 1 つの初期値 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ に対する (N-S) の解とするとき，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が十分近ければ 2 つの解 $\{\boldsymbol{u}(t),p(t)\}$, $\{\boldsymbol{v}(t),q(t)\}$ も時間 $(0,T)$ において近いか？ これらの問題が肯定的であるとき，(N-S) の初期値問題は時間**局所的に適切**であるという．

さて，時間変数を含む偏微分方程式の現代的な取扱いでは，解 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ を，各時刻 t で定義された $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ を変数とする関数への写像とみなす．すなわち，X を $\mathbb{R}^3$ 上で定義された適当な関数空間とするとき，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ を $t\in[0,T]\mapsto\boldsymbol{u}(\cdot,t)\in X$ なる写像と捉える．解を求める集合としては，X に値をとる $[0,T]$ 上の連続関数空間 $C([0,T];X)$ や，s-乗可積分空間 $L^s(0,T;X)$ が基礎となる．通常 X はバナッハ空間であり，そのノルムを $\|\cdot\|_X$ と書くとき，$C([0,T];X)$, $L^s(0,T;X)$ はそれぞれ $\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_X$, $\left(\int_0^T\|u(t)\|_X^s\right)^{1/s}dt$ によってまたバナッハ空間となる[*9)]．

次の定理は (N-S) の初期値問題の局所適切性として

*8) $\sup_{\boldsymbol{x}\in K}\left|\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^\alpha\Phi_j^m(\boldsymbol{x})\right|\to 0$, $j=1,\cdots,N$ がすべてのコンパクト集合 $K\subset\mathbb{R}^n$ とすべての n-多重指数 α に対して成り立つならば，$\Phi_j^m(\boldsymbol{x})$ を初期値とする (2.1) の解 $u_j^m(\boldsymbol{x},t)$ は，ある $\delta>0$ に対して，$\sup_{(\boldsymbol{x},t)\in B_\delta}\left|\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l u_j^m(\boldsymbol{x},t)\right|\to 0$, $|\beta|+l\le m_j$ が成り立つとき，連立系 (2.1) の解は初期値に関して連続依存性を有すると定義する．

*9) これらの関数空間については，黒田成俊[10, 6 章および 10.2 節]を参照されたい．

よく知られている．

定理 3.1（加藤[7]，儀我[4]） $\boldsymbol{a} \in L^3_\sigma$ とする*10)．このとき $T > 0$ と $\boldsymbol{u} \in C([0,T]; L^3_\sigma)$ なる $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ 上の (N-S) の解 $\boldsymbol{u}$ が一意的に存在する．さらに $\boldsymbol{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$ が成り立つ．また解写像 $\boldsymbol{a} \in L^3_\sigma \mapsto \boldsymbol{u} \in C([0,T]; L^3_\sigma)$ は連続である．

解の時間局所存在定理が得られる初期値の関数空間 X をどこまで広くとれるか？といった問題意識は，1990 年代から台頭した非線形シュレディンガー方程式や KdV 方程式の研究の影響といってよかろう．(N-S) の場合，実は定理 3.1 の以前に，藤田–加藤[3] によって $X = H^{\frac{1}{2}}$ が得られていた*11)．ここで，$H^{\frac{1}{2}} \subset L^3$ なる包含関係に注意されたい．現時点での，局所適切性に関する最も広い初期値の関数空間を提唱した結果を紹介しておこう．そのためにいくつかの関数空間を導入する．$\mathbb{R}^n$ 上の局所可積分関数 f に対して，$\|f\|_{BMO} = \frac{1}{|B|}\sup_{B\subset\mathbb{R}^3}\int_B |f(x) - f_B|dx$ と定める．ここで $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy$ であり，上限は $\mathbb{R}^3$ 内の開球 B のすべてについてとる．$BMO = \{f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^3); \|f\|_{BMO} < \infty\}$ と定め，平均振動有界な空間という．$BMO^{-1} \equiv \{f = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}g; g \in BMO\}$ とし，そのノルム（正確にはセミノルム）を $\|f\|_{BMO^{-1}} = \|g\|_{BMO}$ によって定義する．$\mathbb{R}^3$ においては $H^{\frac{1}{2}} \subset L^3 \subset BMO^{-1}$ が成り立つ．このとき，次の定理が得られる．

定理 3.2（コッホ–タタル[9]，三浦[11]） (1)（局所存在）VMO^{-1} を C_0^∞ の BMO^{-1} による閉包*12) とする．任意の $a \in VMO^{-1}$, $\mathrm{div}\, a = 0$ なる初期値 a に対して，$T > 0$ と $u \in C([0,T); VMO^{-1})$ なる (N-S) の $[0,T)$ 上の解 u が存在する．

(2)（一意性）$a \in VMO^{-1}$ とする．このとき，

$$u \in C([0,T); BMO^{-1}) \cap L^\infty_{\rm loc}(0,T; L^\infty) \quad (3.1)$$

なる (N-S) の $[0,T)$ 上の解 u は一意的である．

さて，定理 3.2 の主張する，関数空間 BMO^{-1} における局所適切性が最適かどうか？ 換言すれば，BMO^{-1} は局所適切性が成り立つ初期値の関数空間として最も広いか？という疑問が湧く．これに対しては，さらに斉次ベゾフ空間 $\dot{B}^s_{p,q}$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqq p, q \leqq \infty$ を導入する必要がある．$\phi = \phi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ を次の 3 つの性質を満たす関数とする．

$$\mathrm{supp}\,\phi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3; 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}^{*13)},$$

$$\phi(\xi) > 0, \quad 1/2 < |\xi| < 2 \text{ のとき},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1, \quad \xi \neq 0 \text{ のとき}. \quad (3.2)$$

$\hat{\varphi}_k(\xi) = \phi(2^{-k}\xi)$*14), $k = 0, \pm 1, \cdots$ によって関数列 $\{\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を定める．(3.2) により，任意の $f \in \mathcal{S}$ は $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k * f$ と表現できる*15)．これを関数 f のリトルウッド–ペイリー分解という．

このとき，斉次ベゾフ空間 $\dot{B}^s_{p,q}$ は次のように定義される．

$$\dot{B}^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}; \quad \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \equiv \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{ks}\|\varphi_k * f\|_{L^p}\right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

$s \in \mathbb{R}, 1 \leqq p \leqq \infty, 1 \leqq q < \infty,$

$$\dot{B}^s_{p,\infty} = \left\{ f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}; \quad \|f\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} \equiv \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{ks}\|\varphi_k * f\|_{L^p}\right) < \infty \right\},$$

$s \in \mathbb{R}, 1 \leqq p \leqq \infty.$

ここで，$\mathcal{P}$ は $\mathbb{R}^3$ 上の多項式全体*16) を表す．定義から斉次ベゾフ空間 $\dot{B}^s_{p,q}$ の 3 つめの指数 $1 \leqq q \leqq \infty$ については，次の包含関係が成り立つ．すなわち，$s \in \mathbb{R}$, $1 \leqq p \leqq \infty$, $1 \leqq q_1 \leqq q_2 \leqq \infty$ のとき，

$$\dot{B}^s_{p,q_1} \subset \dot{B}^s_{p,q_2} \quad (3.3)$$

---

*10) 以下，添え字の σ は発散量がゼロ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 0$ を表す．

*11) $H^s \equiv \{f \in L^2; \|f\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$ である．詳細は黒田成俊[10, 6.5 節] 参照のこと．

*12) $a \in VMO^{-1}$ に対して，$\{a_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty$ が存在して，$\|a - a_m\|_{BMO^{-1}} \to 0$ が成り立つ．

*13) $\mathrm{supp}\,\phi$ は集合 $\{\xi \in \mathbb{R}^3; \phi(\xi) \neq 0\}$ の閉包であり，関数 ϕ の台（support）という．

*14) $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$ は関数 f のフーリエ変換を表す．

*15) $\mathcal{S}$ は急減少関数の集合を表す．すなわち，$f \in \mathcal{S}$ であるとは，$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ であって，任意の非負整数 m, 多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ に対して，$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{x}|^m|(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(x)| < \infty$．$\mathcal{S}$ の双対空間を $\mathcal{S}'$ で表し，緩増加超関数の空間という．$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x-y)g(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^3$ を関数 f, g の合成積という．

*16) 定義の $\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ は，$\dot{B}^s_{p,q}$ におけるセミノルムを与える．実際，$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = 0$ より，$\mathrm{supp}\,\hat{f} = \{0\}$ が従い，f は $\mathbb{R}^n$ 上の多項式である．

が成り立つ．初期値が斉次ベゾフ空間 $\dot{B}^s_{p,q}$ に属する場合には (N-S) の初期値問題に対しては，次の**非適切性**（ill-posedness）の結果がある．

定理 3.3（ブルガン–パブロヴィッツ[1)]，米田[14)]）
$2 < q \leqq \infty$ とする．このとき，任意の $\delta > 0$ に対して，$a \in \mathcal{S}$ かつ $\|a\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,q}} \leqq \delta$ を満たす初期値 a と $[0,\delta)$ 上の (N-S) の解 u が存在して，$\|u(t_*)\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,q}} > 1/\delta$ がある $0 < t_* < \delta$ で成り立つ．

注意 (1) X を $\mathbb{R}^3$ における関数空間とする．初期値 $a \in X$ に対して, (N-S) の一意的な解 $u \in C([0,T];X)$ が存在するとき，$S_X : a \in X \mapsto u \in C([0,T];X)$ なる写像が定義できる．定理 3.1, 3.2 の $X = L^3_\sigma$, $X = VMO^{-1}$ においては S_X は連続写像である．実際，解の構成は関数空間 $C([0,T];X)$ における逐次近似法によるものである．その副産物として，写像 S_X の連続性が得られる．ところが定理 3.3 は，関数空間を $X = \dot{B}^{-1}_{\infty,q}, 2 < q \leqq \infty$ まで広くすると，もはや写像 S_X の連続性は保証されないことを主張している．すなわち，解の初期値に対する連続依存性が破たんし，(N-S) の初期値問題は，$\dot{B}^{-1}_{\infty,q}$, $2 < q \leqq \infty$ においては非適切となる．包含関係

$$\dot{H}^{\frac{1}{2}}_2 \subset L^3 \subset BMO^{-1} \subset \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty},$$
$$\dot{B}^{-1}_{\infty,q} \subset \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}, \quad 2 < q \leqq \infty \tag{3.4}$$

に注意されたい．

(2) 岩渕[6)] はモデュレーション空間 $M^s_{2,q}$ *17)，$s < -1$, $1 \leqq q < \infty$ において非適切であることを証明した．

4. おわりに

以上，第 3 節のナヴィエ–ストークス方程式の初期値問題の時間局所適切性について，最先端の結果とその意義を紹介すべく，常微分方程式からはじめて線形偏微分方程式の適切性および非適切性を例に挙げながら解説した．第 1 節は齋藤[13)] を参照した．第 2 節は，溝畑[12)]，伊藤[5)]によるところが多い．第 3 節のより詳しい解説は拙著[8)] を参照されたい．線形，非線形偏微分方程式の双方に渡って，初期値問題の適切性の問題は中心的な研究テーマである．その解明のためには，第 3 節で見たようにリトルウッド–ペイリー分解やベゾフ空間といった調和解析学の手法が重要な役割を演じる．ベゾフ空間については，例えばフレイジャー–ジャウェルス–ワイス[2)] を参照されたい．ブルガンやタオ等をリーダー的な存在とし，実関数論を強力な武器に，難解な非線形偏微分方程式に次々と新たな解法をもたらしてきたことは，この 20 年間の解析学の発展における象徴的な出来事と言えよう．

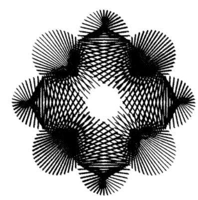
*17) $\psi \in C^\infty_0$ を $\operatorname{supp}\psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3; |\xi| \leq \sqrt{3}\}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\psi(\xi - k) = 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ なる関数とする．$\hat{\Psi}_k(\xi) = \psi(\xi - k)$, $k \in \mathbb{Z}^3$ とするとき，$\|f\|_{M^s_{p,q}} = (\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}(1+|k|^2)^{skq/2}\|\Psi_k * f\|^q_{L^p})^{\frac{1}{q}}$ と定義する．

参考文献

1) Bourgain, J., Pavlović, N., Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D. *J. Func. Anal.* **255**, 2233–2247 (2008).
2) Frazier, M., Jawerth, B., Weiss, G., *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces.* CBMS **79**, Amer. Math. Sci. Providence Rhode Island, 1991.
3) Fujita, H., Kato, T., On the Navier-Stokes initial value problem I. *Arch. Rational Mech. Anal.* **16**, 269–315 (1964).
4) Giga, Y., Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system. *J. Differential Equations* **62**, 182–212 (1986).
5) 伊藤清三，『偏微分方程式』（新数学シリーズ 26）培風館，1966.
6) Iwabuchi, T., Navier-Stokes equations and nonlinear heat equations in modulatoin spaces with negative derivative indices. *J. Differential Equations* **248**, 1972–2002 (2010).
7) Kato, T., Strong L^p-solution of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Math. Z.* **187**, 471–480 (1984).
8) 小薗英雄，ナヴィエ–ストークス方程式のいま．「ミレニアム賞問題—7 つの未解決問題はどうなったのか？」数学セミナー増刊，111–118 (2010).
9) Koch, H., Tataru, D., Well-posedness for the Navier-Stokes equations. *Adv. Math.* **157**, 22–35 (2001).
10) 黒田成俊，『関数解析』（数学講座 15）共立出版，1980.
11) Miura, H., Remark on uniquess of mild solutions to the Navier-Stokes equations. *J. Func. Anal.* **218**, 110–129 (2005).
12) 溝畑茂，『偏微分方程式論』（現代数学）岩波書店，1965.
13) 齋藤利弥，『常微分方程式論』（近代数学講座 3）朝倉書店，1967.
14) Yoneda, T., Ill-posedness of the 3D-Navier-Stokes equations in a generalized Besov space near BMO^{-1}. *J. Funct. Anal.* **258**, 3376–3387 (2010).

（こぞの・ひでお，早稲田大学理工学術院）

フーリエ級数と熱伝導方程式



後藤　俊一

本稿では，フーリエ級数について初学者向けにできるだけ平易な解説を心がけた．ゼミでは時々フーリエ級数に関するテキスト[1,2,7]を取り上げていたものの，講義としてこの題材を扱った経験はなかった．そこで，所属する大学の 3 年生向けを想定して書き始めることにした．

微分積分の講義では関数をテーラー級数に展開する方法を学ぶが，理解しやすい反面，高次の微分可能性を要求される難点がある．フーリエ級数の場合はどうだろうか．

1. フーリエ級数の定義

最初に三角関数の定積分を復習しておこう．まともに原始関数を計算すると複雑になりがちなので，なるべく楽な方法をとり，工夫するとよい．$n=1,2,\cdots$ について

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx dx=\pi \qquad (1)$$

となることは周期性に注意して $\cos^2 nx+\sin^2 nx=1$ を利用すればよい．三角関数のグラフと定積分の定義からすぐに分かる

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=0 \qquad (2)$$

と積を和や差に変形する公式より，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx dx=0 \qquad (3)$$

$(m,n=1,2,\cdots)$，および $m\neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx dx=0 \qquad (4)$$

が得られる．

関数の適当な集合は自然にベクトル空間とみなせるから，(2)–(4) は $1,\cos nx,\sin nx\ (n=1,2,\cdots)$ が内積

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$$

に関して互いに直交するベクトルということである．

実数列 $a_0,a_n,b_n\ (n=1,2,\cdots)$ に対して，第 N 部分和を

$$S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (5)$$

とする級数を**三角級数**という．$S_N(x)$ は周期 2π の周期関数であり，実数全体（$-\infty<x<\infty$）で定義される．オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ をふまえ，

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

と置くことで，(5) を

$$S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}$$

のような**複素型**で書くこともできる．

三角級数が収束してある関数として意味を持つとき，例えば

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)<\infty \qquad (6)$$

のとき，$\lim_{N\to\infty}S_N(x)$ は一様収束して新たな関数 $S(x)$ を定義する．区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された関数 $f(x)$ が $S(x)$ と等しい，すなわち

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (7)$$

と表されたとする．(7) の両辺を $[-\pi,\pi]$ 上で積分してみよう．一様収束により項別積分が可能，すなわち

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)dx$$

が成り立つことと (2) から

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{8}$$

が得られる．両辺に $\cos nx$ や $\sin nx$ を掛けて積分し，(1)–(4) を使って

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \tag{9}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \tag{10}$$

が得られる．従って (7) の右辺の級数の係数たちは (8)–(10) を満たさなければならない．複素型の場合は

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{11}$$

となる．

逆に，与えられた関数 $f(x)$ から (8)–(10) または (11) で係数たちを定義したとき，a_0, a_n, b_n または c_n を $f(x)$ の**フーリエ係数**，$S_N(x)$ を第 N 部分和とする級数を $f(x)$ の**フーリエ級数**という．

どのような $f(x)$ に対してそのフーリエ級数は収束するだろうか．例えば $f(x)$ が $[-\pi,\pi]$ 上で C^2 級であれば，(9) の右辺で部分積分法を用いて

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx \qquad (12)\\ &= \frac{1}{n^2\pi}\Big\{(f'(\pi)-f'(-\pi))\cos n\pi \\ &\qquad -\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx dx\Big\} \end{aligned}$$

と計算し，$|a_n| \le Cn^{-2}$（C は定数）と評価することができる．b_n について同じ評価式 $|b_n| \le Cn^{-2}$ を得るには，追加の条件として

$$f(\pi) = f(-\pi) \tag{13}$$

が必要となる．このとき (6) が成り立つ．

具体的な関数 $f(x) = x^2$ でフーリエ係数を計算してみよう．x^2 は偶関数なので $b_n = 0$ は計算しなくともよい．$a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}, a_n = \dfrac{4\cos n\pi}{n^2}$ より x^2 のフーリエ級数は

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \cdots$$

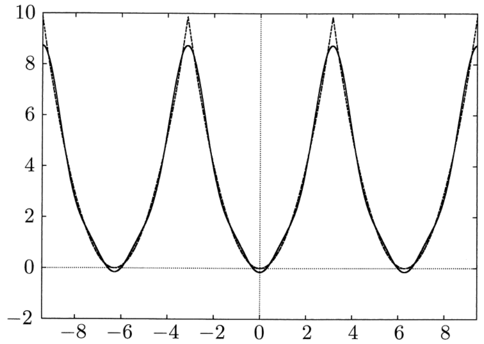


図 1　$f(x) = x^2$ と $S_3(x)$ のグラフ．

である．級数は実数全体で収束しており，3 節の議論により $x^2\,(-\pi \le x \le \pi)$ を周期 2π の周期関数として拡張したものに一致することが分かる（図 1）．

2. リーマン–ルベーグの定理

フーリエ係数は (8)–(10) または (11) で定義されるので，$|f(x)|$ が $[-\pi,\pi]$ 上で積分可能なときフーリエ級数を考えることができる．ここでは $f(x)^2$ が積分可能と仮定して

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi}(S_N(x)-f(x))^2dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)^2dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)f(x)dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx \qquad (14) \end{aligned}$$

を計算してみよう．右辺第 1 項と第 2 項は (5) を代入して展開し，(1)–(4) を用いる．(14) の左辺が非負であることから

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}({a_n}^2 + {b_n}^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx$$

が導かれ，左辺は単調増加で上に有界である．$N \to \infty$ として得られる

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx \tag{15}$$

を**ベッセルの不等式**という．(15) により，$n \to \infty$ のとき $a_n, b_n \to 0$ となることも分かる．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \tag{16}$$

が成り立つ．これを**リーマン-ルベーグの定理**という．$f(x)$ が C^1 級のときは (12) から（b_n についても同様に）直ちに導かれる．

3. フーリエ級数の収束とギブスの現象

前節の (15) を $f'(x)$ に対して用い，(12) から a_n, b_n の評価をやり直そう．（さきほどは C^2 級を仮定したが）$f(x)$ は $[-\pi,\pi]$ 上で C^1 級かつ (13) を満たすとして，a'_n, b'_n を $f'(x)$ のフーリエ係数とする．このとき，

$$|a_n| + |b_n| \le \frac{|a'_n| + |b'_n|}{n}$$

を得る．コーシー-シュワルツの不等式と (15) を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

となり，(6) が成り立っている．

次に，各点 x においてフーリエ級数が $f(x)$ に収束することを見るために，

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos nx = \frac{\sin((2N+1)x/2)}{2\sin(x/2)} \tag{17}$$

を準備する．(17) の右辺を $D_N(x)$ と置く．$D_N(x)$ を**ディリクレ核**という．$D_N(x)$ は周期 2π の周期関数であり，(2) より

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1 \tag{18}$$

を満たす．(17) を示すには，オイラーの公式より

$$1 + \sum_{n=1}^{N}\cos nx + i\sum_{n=1}^{N}\sin nx = \sum_{n=0}^{N} e^{inx}$$

と書き，右辺を等比数列の和と見て

$$\sum_{n=0}^{N} e^{inx} = \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(N+1)x/2}(e^{-i(N+1)x/2} - e^{i(N+1)x/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})}$$

と計算してから三角関数に戻し，両辺の実部どうしを比較すればよい．(9), (10) と三角関数の加法公式から

$$a_n\cos nx + b_n\sin nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(x-t)dt$$

となるので，(17) を用いて (5) を

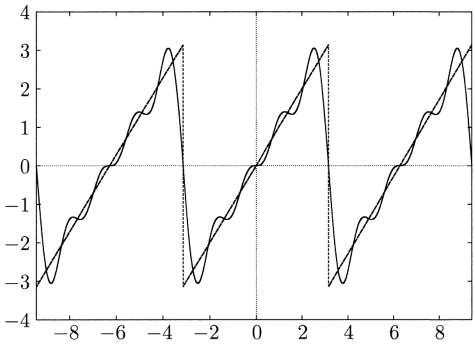


図 2　$f(x) = x$ と $S_4(x)$ のグラフ．

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt \tag{19}$$

と変形することができる．$f(x)$ が $[-\pi,\pi]$ 上で C^1 級かつ (13) を満たすとき，周期 2π の周期関数として実数全体に拡張したものも同じ $f(x)$ で表すことにする．(18) と $D_N(x)$ の周期性に注意して

$$\begin{aligned} & f(x) - S_N(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(t))D_N(x-t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin((2N+1)(x-t)/2)dt \end{aligned} \tag{20}$$

と計算すると，$N \to \infty$ のとき $S_N(x)$ は $f(x)$ に収束することが分かる．実際，$\varphi(t) = \dfrac{f(x) - f(t)}{2\sin((x-t)/2)}$ は有界な関数で (16) が適用できる．このとき (15) は等式として成立し，**パーセバルの等式**と呼ばれる．

条件 (13) は (20) を用いた上の収束の議論にはなくてもよい．具体例として $f(x) = x$ $(-\pi \le x < \pi)$ を考えよう．x は奇関数なので $a_0 = 0$ と $a_n = 0$ を計算する必要はない．$b_n = -\dfrac{2\cos n\pi}{n}$ より x のフーリエ級数は

$$2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \cdots$$

と求められる．$f(x)$ を周期 2π の周期関数として拡張したときに $x = (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ で不連続となり，フーリエ級数のグラフは両端点の中間を通っていることに注意しよう（図 2）．もう一つ，

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \pi), \\ 0 & (-\pi \le x < 0) \end{cases}$$

は $x = 0$ でも不連続である．このような場合にもフーリエ係数は $a_0 = 1, a_n = 0, b_n = \dfrac{1 - \cos n\pi}{n\pi}$ と計算することができて，$g(x)$ のフーリエ級数は

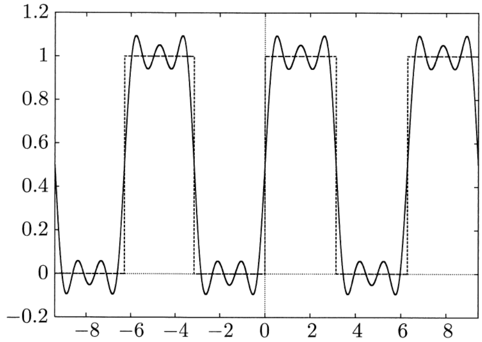


図 3　$g(x)$ と $S_5(x)$ のグラフ．

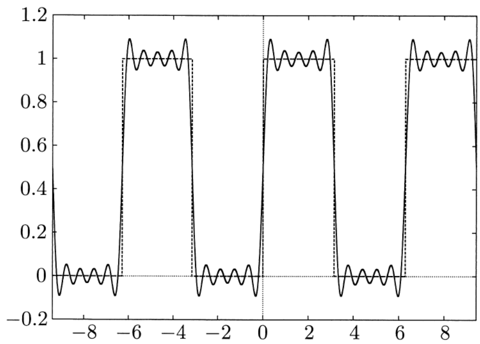


図 4　$g(x)$ と $S_9(x)$ のグラフ．

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{3\pi}\sin 3x+\frac{2}{5\pi}\sin 5x+\cdots$$

となる（図 3，図 4）．区分的に C^1 級ならば (20) を用いた議論が適用できるので，これらの場合は $f(x)$ の不連続点を除けば $S_N(x)\to f(x)$ $(N\to\infty)$ となることが分かる．

一般に，$x=a$ の近傍で $f_n(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ かつ $f(a+0)>f(a)$ または $f(a+0)<f(a)$ とするとき，a に右側から収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x_n) > f(a+0)$$

または

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n) < f(a+0)$$

となるときに，$f_n(x)$ は a の右側で**ギブスの現象**をおこすという．$f(x)$ が有界変動のとき，不連続点 $x=a$ における値を $\dfrac{f(a+0)+f(a-0)}{2}$ で定義しておけば，不連続点を含めた各 x で $S_N(x)\to f(x)$ $(N\to\infty)$ となり，$S_N(x)$ は a の両側でギブスの現象をおこすことが知られている*1)．

4. 熱伝導方程式のフーリエ級数解

テーラー級数の場合と比べて三角関数は微分方程式と相性が良い．すなわち $\psi(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$ $(A,B,\omega$ は定数) は定数係数の 2 階線形常微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)=-\omega^2\psi(x) \tag{21}$$

を満たす．ベクトル空間の用語を用いれば，$-\omega^2$ は線形写像 $\dfrac{d^2}{dx^2}$ の固有値，$\psi(x)$ は固有ベクトルである．

さて，フーリエ級数の応用として，そもそものきっかけともなった熱伝導方程式の初期値境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (t>0,\ 0<x<\pi), \tag{22}$$

$$u(t,0)=0,\ u(t,\pi)=0\quad (t>0), \tag{23}$$

$$u(0,x)=f(x)\quad (0<x<\pi) \tag{24}$$

の解 $u(t,x)$ の構成について考えよう．(23) を**ディリクレの境界条件**，(24) を初期条件という．指数関数の微分が $(e^{\lambda t})'=\lambda e^{\lambda t}$ であることと (21) に (23) を考え合わせ，解の候補として $u(t,x)=e^{\lambda t}\sin nx$ を (22) に代入すると，パラメータの条件として $\lambda=-n^2$ $(n=1,2,\cdots)$ が得られる．初期条件が $f(x)=\sin nx$ のように特別な形で与えられたときには，これで問題は解決された．また，(22), (23) の解には**重ね合わせの原理**が適用でき，例えば $f(x)=b_n\sin nx+b_m\sin mx$ のとき $u(t,x)=b_ne^{-n^2t}\sin nx+b_me^{-m^2t}\sin mx$ は解となる（図 5）．一般の場合，$f(x)$ は奇関数として $[-\pi,\pi]$ に拡張したものとし，3 節までの議論で

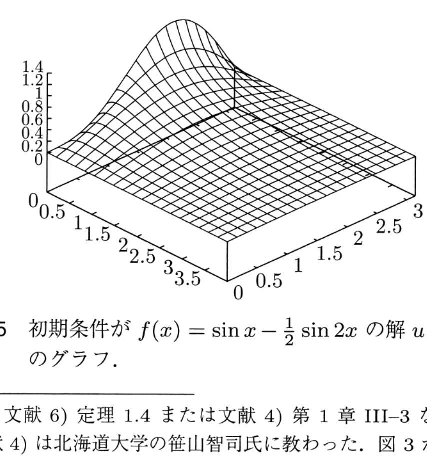


図 5　初期条件が $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$ の解 $u(t,x)$ のグラフ．

*1)　文献 6) 定理 1.4 または文献 4) 第 1 章 III–3 など．文献 4) は北海道大学の笹山智司氏に教わった．図 3 から図 4 へと項を増やしても上極限と下極限の差が縮まらない．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

と表すことができれば問題は解けたと考えられる．実際，形式的には

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx \tag{25}$$

は (22)–(24) を満たしている．

級数の収束性と微分可能性を確認しよう．$\delta > 0$ とする．$C_\alpha = \sup_{n=1,2,\cdots} (n^\alpha \delta e^{-n^2\delta}) < \infty$ を使って

$$|b_n e^{-n^2 t} \sin nx| \le |b_n| e^{-n^2\delta} \le \frac{C_2 |b_n|}{n^2 \delta} \quad (t \ge \delta)$$

となり，$|f(x)|$ が積分可能ならば (10) より b_n は n に関して有界で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^2} < \infty$ と評価できる．このとき (25) の右辺は $[\delta, \infty) \times [0, \pi]$ で一様収束する．繰り返し項別微分して得られる級数も，微分の回数を t について k 回，x について ℓ 回とするとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^k n^{2k+\ell} e^{-n^2 t} \sin\left(nx + \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

となり，$C_{2k+\ell+2}$ を用いた評価により $[\delta, \infty) \times [0, \pi]$ で一様収束することが分かる．δ は任意に取れるので上の収束は $(0, \infty) \times [0, \pi]$ において広義一様であり，(25) で定義した $u(t,x)$ は $t \neq 0$ ならば何回でも微分できる．

初期条件 $f(x)$ が $[0, \pi]$ 上で C^1 級かつ**両立性の条件**として (23) を満たせば，3 節の議論と同様にして (25) は $[0, \infty) \times [0, \pi]$ で一様収束し，従って

$$\lim_{t \to +0} \sup_{x \in [0,\pi]} |u(t,x) - f(x)| = 0 \tag{26}$$

が成り立つ．例えば $f(x) = x(\pi - x)$ とすると，$f(x)$ のフーリエ係数は (10) により

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{4(1 - \cos n\pi)}{n^3 \pi}$$

と計算され，このとき

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-(2m+1)^2 t} \sin((2m+1)x)}{(2m+1)^3}$$

は (22)–(24) の解である．

さらに議論を必要とするが，$f(x)$ が $[0, \pi]$ 上で連続かつ (23) を満たせば (26) を示すのに十分であることも証明できる*2)．

*2) 文献 5) 第 1 章 §1.6 など．

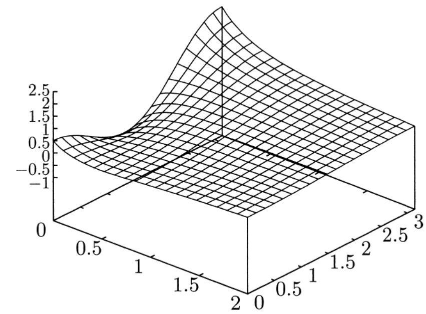


図 6 初期条件が $f(x) = \frac{1}{2} - \cos x + \cos 2x$ の解 $u(t,x)$ のグラフ．

境界条件が (23) と異なる場合も同じように解を構成することができる．(23) の替わりに**ノイマンの境界条件**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 \quad (t > 0) \tag{27}$$

を満たす解の候補は $u(t,x) = e^{\lambda t} \cos nx$ であり，パラメータの条件は $\lambda = -n^2 \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ となる．例えば，解の重ね合わせにより

$$u(t,x) = \frac{1}{2} - e^{-t} \cos x + e^{-4t} \cos 2x$$

は (27) を満たす解である（図 6）．

一般に，$f(x)$ が $[0, \pi]$ 上で C^1 級かつ両立性の条件として (27) を満たすとき，$f(x)$ を偶関数として $[-\pi, \pi]$ に拡張し，(8), (9) で a_0, a_n を定義すると，

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

は (22), (27), (24) の解となる．

5. フーリエの積分定理とフーリエ変換

ここまで $f(x)$ は区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数として議論してきた．しかしフーリエ級数は実数全体で意味をもち，ある $-\pi \le x \le \pi$ で $f(x)$ に収束するとき，$f(x)$ を周期 2π の周期関数として拡張したものに $x \pm 2m\pi \ (m = 1, 2, \cdots)$ で収束する．いわば，実数全体で定義された周期関数に対してフーリエ級数による表現を考えていたことになる．最後に，$f(x)$ に周期性を要求しない形にフーリエ級数を一般化しよう．

実数全体で定義された C^1 級かつ絶対値が $(-\infty, \infty)$ 上で積分可能な関数を $f(x)$ とする．

$$S_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \xi (x - t) dt \right) d\xi$$

と置く．$|f(t)\cos\xi(x-t)| \le |f(t)|$ より右辺の積分は順序交換が可能で

$$S_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}dt$$

となる．ここで

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2} \tag{28}$$

を用いると

$$f(x)-S_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\sin\lambda(x-t)dt \tag{29}$$

と計算することができる．リーマン–ルベーグの定理は $\varphi(t) = \dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}$ の絶対値が $(-\infty,\infty)$ 上で積分可能なとき無限区間の場合に拡張できて*3)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\sin\lambda t dt = 0$$

が成り立つので，(29) の両辺で $\lambda\to\infty$ とすれば

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\xi(x-t)dt\right)d\xi \tag{30}$$

が導かれる．これを**フーリエの 2 重積分定理**という．三角関数の加法公式

$$\cos\xi(x-t) = \cos(\xi t)\cos(\xi x)+\sin(\xi t)\sin(\xi x)$$

から

$$a(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\xi t)dt,$$

$$b(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\xi t)dt$$

と置くと，(30) を

$$f(x) = \int_0^\infty (a(\xi)\cos(\xi x) + b(\xi)\sin(\xi x))d\xi$$

のように表すことができる．形式的に $\displaystyle\int_0^\infty d\xi$ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ に置き換えて見比べてみるなどして，フーリエ級数との類似に注目してほしい．複素型では

$$\begin{aligned} c(\xi) &= \frac{a(\xi)-ib(\xi)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt \end{aligned} \tag{31}$$

と定義して $|c(\xi)|$ が $(-\infty,\infty)$ で積分可能ならば

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi)e^{i\xi x}d\xi \tag{32}$$

となる．(31) を $f(x)$ の**フーリエ変換**，(32) を**フーリエ反転公式**という．

フーリエ（J.-B.-J. Fourier, 1768–1830）自身はどんな関数も三角級数を用いて表すことができると考えたらしい．その主張は完全には正しくなかったが，疑問を解明しようとする努力が解析学を発展させ，多くの応用を生んだのだろう．

本稿のテーマは関数空間を設定して議論するのが常道だったかもしれないが，今回は大学初年次に学ぶ微分積分から準備なしに続けられるような話とした．

級数の収束判定や一様収束と項別積分・項別微分などについては文献 3) で確かめるとよい．(28) の広義積分の計算は同書の第 IV 章 §11 の例 5 または §14 の例 4 に，ギブスの現象のところで出てきた "有界変動" は聞きなれないと思うが，これも同書の第 IV 章 §16 にある．

図はすべてフリーソフトの gnuplot を用いて作成した．

参考文献

1) 新井仁之:『フーリエ解析と関数解析学』, 培風館 (2001).
2) E. クライツィグ:『フーリエ解析と偏微分方程式』(原書第 8 版)，培風館 (2003).
3) 杉浦光夫:『解析入門 I』，東京大学出版会 (1980).
4) 洲之内源一郎:『現代数学講座 フーリエ解析』，共立出版 (1956).
5) 藤田宏・他:『岩波講座基礎数学 数理物理に現われる偏微分方程式 I』，岩波書店 (1977).
6) 溝畑茂:『偏微分方程式論』，岩波書店 (1965).
7) 吉川敦:『関数解析の基礎』，近代科学社 (1990).

（ごとう・しゅんいち，北海道教育大学札幌校）

*3) 文献 6) 定理 1.3 の注意など．

特集／解析学における様々な発想

IMA研究所の思い出

米田　剛

IMAのポスドクになるに至るまで

私は2009年の9月から翌年8月まで，Minnesota大学のIMA（Institute for Mathematics and its Applications, http://www.ima.umn.edu/）という所でポスドクを経験しました．そこで得た経験は何ものにも変えがたいものでした．正に，私の研究スタイルに良い意味で大きく影響する経験だったと確信しています．

当時博士課程3年生だった私は，指導教官だった儀我美一先生に「学位取得後は海外でポスドクを経験してはどうか」と提案されました．儀我先生のご指導を受ける以前にも色々な所属を転々としてきていたせいか，「海外で研究の経験を是非とも積みたい」という想いはもともと強くありましたので，迷うことなく海外のポスドクに挑戦（この時点では海外のポスドクの公募に挑戦）しました．IMAのポスドクは公募だったので，当時の私はその公募書類を一生懸命書きました．もちろんすべてが英語ですし，こういった英語での書類作成も人生初です．公募書類提出時は「こういうネイティブでない者によって書かれた英語での書類は，果たしてアメリカでは通用するものなのだろうか」という不安感は常につきまとっていましたが，その公募書類提出から3カ月後くらいに採用通知が来ました．実は同時期に公募があったカナダのPIMS（Pacific Institute for the Mathematical Sciences）のポスドクにもapplyしていたのですが，そこからも採用通知が来ていたので，IMAとPIMSの就任期間をアレンジしないといけないことになってしまいました．IMAとPIMSに対して直接交渉し，結局IMAには2009年9月から2010年8月まで，PIMSにはそのIMA終了後に行くということになりました．IMAとPIMSとの競合はこれで解決したのですが，日本のsemesterは3月終了なので，9月始まりのIMAのポスドクに就任するためにはどうしても半年空いてしまいます．そこでその半年を埋めるためにアメリカのArizona州立大と韓国の成均館大学の（実質的には公募制ではない）ポスドクをそれぞれ3カ月経験することで，その半年を埋めることになりました．こうして私の海外ポスドクキャリアが積まれることとなりました．

Minnesotaの冬

Minnesotaはアメリカ本土で一番寒い場所と聞いていたので，きっと9月上旬も寒いだろう，と思っていましたが，いざ着いてみると想像以上に暑く，下手したらその時期の日本以上でした．Minnesotaの冬は噂

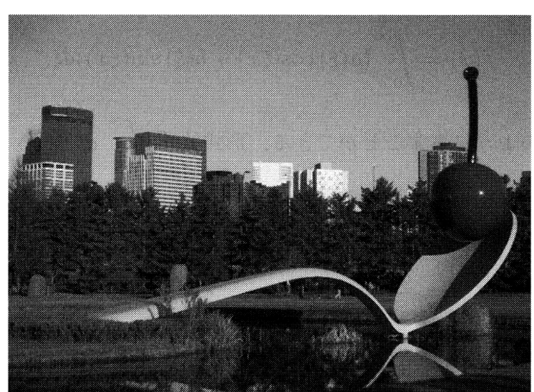


図1　Minneapolisの有名な観光地である彫刻公園.



図2　近年のアメリカ文化を象徴するようなレストランでの料理．行きつけでした．「Sushi は（東アジア系）アメリカの料理だ」と錯覚に陥るくらい Sushi 屋は多かったです．日本に帰ってきてからめっきりお寿司を食べなくなりました．店の名は Obento-Ya.

通りとても寒く，1月2月はマイナス20度を下回っていました．札幌ほどではないにしても，雪も結構積もります．ただ，近くに山がないので IMA 付近にはスキー場は一つもありません．その点がアメリカ生活での唯一の不満でした．そのシーズンは私の大好きなスノーボードができずじまいで，とても悔しい思いをした記憶があります（余談ですが，今のところビッグキッカーで Frontside360-トゥ抜け-mute グラブ，グラブなしなら 540 を回せるレベルです．720 や cork-540 も何回か成功させていますが，まだまだ完成度が低いです．今後の研究課題です）．しかし厳冬なのにアパートの部屋の中はとても暑く，いつも半袖でした．布団も夏に使うようなブランケット一枚だけでした．しかも微妙な温度調整はできないので，とても暑いときは窓を開けるという「エネルギーの無駄使い生活」を送っていました．

IMA で学んだこと

2009–2010 年度の IMA は「流体研究」をテーマとしていたので，IMA のポスドクも流体関係者が中心でした．しかもその構成が面白く，純粋数学から応用数学，工学に至るまでの幅広い分野から集められていました．日本の研究機関ではあまり見受けられないような人員構成だったことを強烈に覚えています．私自身は，自分の分野と多少近い人と共著論文を何本か書くことができたものの，「IMA 滞在中にもっとエンジニア達とも議論を進められれば良かったなあ」と今になってつくづく思います．

彼らの議論では，よく「計算すればそうなるというのは確かにそうかもしれない．で，その計算のアイデアは何だい？」と言われました．彼らの研究スタイルでは，アイデアを言葉にして会話のキャッチボールをしながらそれを研ぎ澄まします．このことを彼らとの議論で実感しました．彼らとの議論に遠慮は無用だ，とも実感しました．「あまり議論の腰をおらないでおこう」と思って自分の意見を言わずに遠慮していると「なに遠慮してるんだ？ Tsuyoshi も思ったことをはっきりと言え！」と共同研究者にイライラされたことすらあります．

「遠慮しないこと．疑問に思ったことは恥ずかしがらずにどんどん質問し，堂々と意見すること．アイデアを，簡潔で強烈な言葉に集約させること」これは向こうの人と議論を進める上での必須事項だとつくづく感じます．

最後に

アメリカのやり方すべてが良いという風には私は全く思わないですが，少なくとも研究界の「アイデアとアイデアのぶつけ合い」の習慣に関しては，我々日本人が見習わなければならない点が多々あるように思います．国の発展の原動力とは何か？という問いを考えた場合，私は「今までにないアイデアの現実世界への具現化」にあると思っています．経済の言葉でいうと「イノベーション」といったところでしょうか．現実世界の我々の経済活動は，アイデアという甘い果実をつつく「ハチドリ」のようなものだと思います．不景気になったときに，我々はハチドリそのものにムチを打ちますが，むしろそのハチドリの栄養源である「甘い果実」を大きく育てる努力をしないといけないのではないでしょうか．さらに付け加えれば，その甘い果実を大きく育てるために，その果実の木が根付いている「土」（ここでは社会に出る前の学生やポスドクなどを指す）を精魂込めて耕すことが，今の日本において最も重要なことなのではないでしょうか．

（よねだ・つよし，北海道大学大学院理学研究院）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

石村 直之

解析学の名著から

「解析学の特集にあたり名著の紹介をお願いします」との依頼に対して,「はい分かりました」と二つ返事でお引き受けしたものの，いざ書き始めてみるとハタと困ることになった．名著が，取り上げるべき書物が多過ぎるのである．もちろんこれは，解析学と関連する分野が広範なためである．実際，広く一般の対象，すなわち，自然現象あるいは社会現象を，数学の方法で取り扱おうとする際には，当然ながら多くは数理解析の手法となる．もちろん解析学においても，純粋な数学そのものの発想により研究するという立場は成立する．しかしながら特に解析学では，そのような狭い了見に固執するばかりでは大きな発展の原動力を失うことになりかねない．よってここでは，可能な限り大きな態度で解析学をとらえておきたい．

そうすると，どこまでを解析の著作と考えるのか悩むところとなる．例えば，数理経済学の精緻な理論構成を示して余りない G. Debreu, "Theory of Value" (Yale University Press, 1959) は，解析と述べるには axiomatic に過ぎるが，現実の対象を深く理解するために，数学が見事に展開かつ応用されており，少なくとも私にとっては解析系の本とみなし得る．P. Wilmott, S. Howison, and J. Dewynne, "The Mathematics of Financial Derivatives" (Cambridge University Press, 1995) ともなると，数理ファイナンスの入門書でありながら，著者たちが元々は流体力学や自由境界問題の研究を行っていたためか，初めから終わりまで応用解析の書物という感覚で読み進めることができる．どちらの書物も一般には数学の著作とは分類されていないだろう．ここまでが解析の書物でありここからは違う，という線引きはなかなか難しい．

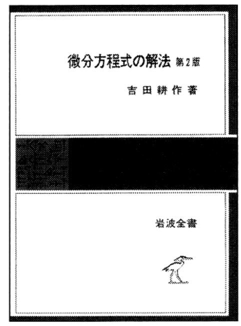
さらに加えて，そもそも名著の条件とは何であろうか．当然ながら学術書の名著と一般の名著とでは，その条件が異なるだろう．一般教養という点の名著ならば，例えば塩野七生『わが友マキアヴェッリ』(中央公論社，1987年) では，マキアヴェッリの『君主論』を評した箇所で「…そしてこれは無視できない利点なのだが，一気に読める分量であることによって，世界の名著に欠かせない一冊となった.」と，分量について言及している．

数学の学術書が一気に読まれることはまずあり得ないが，分量そのものは，読み手の専門により判断が分かれてくるだろう．E.M. Stein, "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions" (Princeton University Press, 1971) は, これが解析学の手法の一つだ, と読む者に突きつけて来る名著であるが, 300頁前後の分量も快い．同じ著者の "Harmonic Analysis" (Prinston University Press, 1993) となると，門外漢には約700頁は少し長過ぎると感じる．一方, Springer のいわゆる黄表紙シリーズでの日本人碩学による解析の2冊，すなわち K. Yosida, "Functional Analysis" (6th edition, 1980) および T. Kato, "Perturbation Theory for Linear Operator" (2nd edition, 1970) となると，それぞれ約500頁および約620頁の大著ではあるが，最後まで集中力を保つことができる．もちろん周知のように，前者は関数解析を極めて几帳面に網羅的に解説した名著であり，後者は，摂動論という現在の観点からはややもすれば特殊な話題についての書物との印象を与えるかも知れないが，内実は透徹した考察に裏付けられた線形作用素全般に関わる名著である．

このように色々と取りとめもない考えを重ねてみたが，要は名著紹介とは紹介者の性向や趣味に大きく依存する，ということは疑いない．そこでいささか開き直り，次頁では関数解析を基本とした微分方程式に関する書物で，著者が既に故人となっているものを挙げることにした．当然のことながら，現役の研究者による好著も数多く出版されているのであるが，あえてやや古い著作を取り上げることにする．これは，私が勉強してきたという思い入れがあることも一つの理由であるが，解説されている内容は現在でも古びていないと思われるからである．ともあれ，この是非は読者の判断に委ねたい．

(いしむら・なおゆき，一橋大学大学院経済学研究科)

微分方程式の解法



吉田耕作著，第 2 版，B6 判，322 頁，岩波書店，1978 年

よくこれだけの分量の中に，常微分方程式と偏微分方程式の基礎事項の多くを手際よく解説できたものだ，と驚きをもっていえる．細かな点への注意も怠りがなく，まさに著者の卓越した能力のなせる技であろう．ともあれ本書の水準は高い．実際に講義で用いようとすれば，現在の大多数の学生さんにとっては，相当に補足説明を加えなければならない．そうでなければ，難解な講義と評価されるだろう．

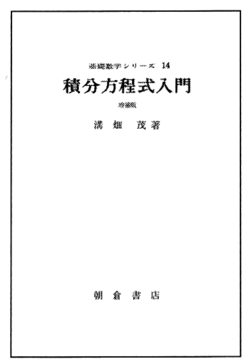
位相解析 理論と応用への入門（『函数空間論』改題）



加藤敏夫著，A5 判，共立出版（復刊：2001 年，336 頁，本体 5300 円，改題前初版：1957 年）

関数解析の入門書．さりげない記述にハッとさせられることも多く，著者の深遠な考察と大いなる力量を感じる．初版の出版年は古いが，内容の取り扱われ方に古さは感じられず，むしろ味わい深い．ゆっくり勉強しようとする人向き．同じ著者による寺沢寛一編『自然科学者のための数学概論（応用編）』（岩波書店，1960 年）所収の「変分法」も秀逸の論説である．

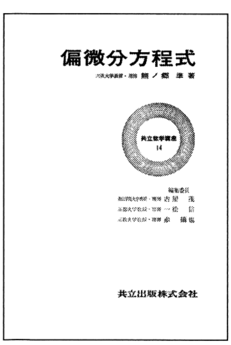
積分方程式入門



溝畑茂著，増補版，254 頁，朝倉書店，1979 年（復刊：B5 判，2004 年）

まえがきにもあるように，前半部は R. Courant and D. Hilbert “Methoden der mathematischen Physik” の線に沿って微分方程式と積分方程式を現代的に取りまとめたものである．後半は完全連続作用素の解説と例が述べられている．同じ著者の『偏微分方程式論』（岩波書店，1965 年）も質の高い作品であるが，より教育的な配慮が行き届き丁寧な記述のこの著作も見事である．

偏微分方程式

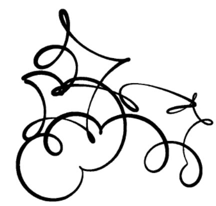


熊ノ郷準著，A5 判，286 頁，本体 4200 円，共立出版，1978 年

関数解析を基礎とした偏微分方程式論の優れた著作．一般に微分方程式系の本では，解析のための道具に重点を置きがちな数学者が著すよりも，物理学者や数理工学者が著したほうが，現実とのつながりが意識されて面白いと感じることも多い．しかし，この志の高い数学書では，そのような浮気心を抱かせる機会を与えず，何とか最後まで読み終えたときには充実感が残るだろう．

半群と複素解析

解析半群とその応用



高坂　良史

1. はじめに

次の常微分方程式の初期値問題を考えてみよう．

$$\frac{du}{dt} = au \ \ (t > 0), \quad u(0) = u_0. \tag{1}$$

ここで，$u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \to u(t)$ は未知関数であり，$a, u_0 \in \mathbb{R}$ は与えられた定数である．上記の微分方程式は変数分離形と呼ばれるタイプの常微分方程式で，理系の学生であれば解法を大学の2年次あたりで学ぶであろう．(1) を解くと，解は

$$u(t) = e^{at} u_0 \tag{2}$$

と表される．

では，ベクトル値関数 $\boldsymbol{u} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^N$, $t \to \boldsymbol{u}(t)$ と N 次正方行列 A に対して，

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = A\boldsymbol{u} \ \ (t > 0), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \tag{3}$$

（ただし，$\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^N$ は与えられた定ベクトル）の解はどのように表されるだろうか？ A が行列であるから，この初期値問題は (1) と同じ方法では解けない．そこで (1) の解の表記 (2) から，以下のようなことを考えてみよう．今，関数 e^{at} を Maclaurin（マクローリン）展開すると，

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} \tag{4}$$

を得る．ここで (4) において，実数 a を行列 A に取り換えたものを考える．つまり，

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \tag{5}$$

実数を行列に取り換えたわけであるから右辺の級数が収束するかどうかは明らかではないが，N 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，A のノルムを

$$\|A\| := \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

と定めると，このノルムの下で右辺の級数が収束することがわかる（詳しくは，例えば文献 4) を参照）．(5) は行列の指数関数と呼ばれ，以下の性質が成り立つことが確かめられる：

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}, \quad e^{tA}|_{t=0} = I. \tag{6}$$

ただし，I は単位行列である．よって，行列の指数関数 e^{tA} を用いれば，(3) の解は

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{tA} \boldsymbol{u}_0 \tag{7}$$

と表すことができる．

ここまでの話で考える次元を 1 から N へと拡張できたので，無限次元の場合はどうなのかと考えるのは自然な流れであろう．次節以降では Banach（バナッハ）空間 X における線形作用素 A に対して考えてみよう．

2. 半群

X を Banach 空間とし，$u : [0, \infty) \to X$, $t \to u(t)$ とする．以後，Banach 空間に値をとる関数を考えることになるが，実数値関数や複素数値関数と同様に，その関数の微分，積分を定めること

ができる（例えば文献 1) を参照）．今，X における線形作用素 A に対して，抽象的発展方程式

$$\frac{du}{dt} = Au \ \ (t > 0), \quad u(0) = u_0 \qquad (8)$$

を考えよう．ただし，$u_0 \in X$ である．

少し記号の準備をしよう．作用素 A の定義域を $D(A)$ で表すことにし，Banach 空間 X に対して，有界線形作用素 $A : X \to X$ で $D(A) = X$ となるものの全体を $\mathscr{L}(X)$ で表すことにする．なお，$\mathscr{L}(X)$ も Banach 空間となる．

さて，今考えたいのは，「(8) の解が (2) や (7) と同様な形で表せないか？」ということである．実は $A \in \mathscr{L}(X)$ であれば，(8) の解は (2) や (7) と同様な形で表せることは行列の場合と同様にして確認できる．実際，$A \in \mathscr{L}(X)$ のノルムを

$$\|A\| := \sup_{u \in X,\, u \neq 0} \frac{\|Au\|_X}{\|u\|_X}$$

と定義すると，$A \in \mathscr{L}(X)$ に対して (5) を考えたとき，その右辺の級数の部分和がこのノルムの下で Cauchy（コーシー）列であることを示すことができる．よって，$\mathscr{L}(X)$ が Banach 空間であることから，右辺の級数が収束することがわかり，e^{tA} を有界線形作用素として得ることができる．さらに，(6) の性質（ただし，この場合は I は恒等作用素）も確かめられるので，(8) の解を $u(t) = e^{tA}u_0 \ (\in X)$ によって表すことが可能となる．しかし，後の節で紹介するように，(8) は偏微分方程式の解析に応用できるが，その際 $A \in \mathscr{L}(X)$ という仮定は強すぎるので，必ずしも $A \in \mathscr{L}(X)$ でない場合について考えたい．ここで，少し話を抽象化しておこう．

今，$A \in \mathscr{L}(X)$ に対して $U(t) = e^{tA} \ (t \geq 0)$ とおくと，$U(t)$ は有界線形作用素であり，以下の性質を満たす：

(S1) $U(t)U(s) = U(t+s) \ \ (t > 0, s > 0)$, $U(0) = I$（I は恒等作用素）．

(S2) $U(t)$ は $[0, \infty)$ で強連続である．すなわち，任意の $u_0 \in X$ に対して $U(\cdot)u_0 : [0, \infty) \to X$ が連続である．

一般に，X における有界線形作用素の族 $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ が (S1)–(S2) を満たすとき，$\{U(t)\}_{t \geq 0}$ を（$\mathbf{C}_0$）**半群**という．以後，特に断らない限り，（C_0）半群を単に半群と呼ぶことにする．

以下の節では，必ずしも $\mathscr{L}(X)$ に属さない A から生成される半群について考えていこう．

3. Dunford（ダンフォード）積分

まず，複素関数論における定理を紹介しよう．以下，$D \subset \mathbb{C}$ とする．なお，複素関数 f が領域 D で**正則**であるとは，f が D の各点で微分可能であることをいう．また，複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線 C によって分けられる領域で有界なほうを C の内部といい，(C) によって表すことにする．さらに曲線 C には，(C) を左に見て進む方向を正の向きとして，向きづけがされているものとする．

【Cauchy の積分公式】

f は領域 D で正則とする．C を D 内の滑らかな単純閉曲線とし，その内部 (C) は D に含まれているとする．このとき，$\zeta \in (C)$ に対して

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz \qquad\qquad$$
$$\left(= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-\zeta)^{-1}\,dz \right). \qquad (9)$$

領域 D 上の関数 f が D の各点の近傍で絶対収束するべき級数に展開されるとき，f は D で**解析的**であるという．複素関数論においては，正則であることと，解析的であることは同義である．それは Cauchy の積分公式を利用して示される．

今，X を複素 Banach 空間とする．X における閉作用素 A に対して，

$$\rho(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid zI - A \text{ が可逆で},$$
$$(zI - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)\}$$

とするとき，$\rho(A)$ を A の**レゾルベント集合**という．また，$z \in \rho(A)$ に対して，$R(z, A) := (zI - A)^{-1}$ を**レゾルベント**という．$\rho(A)$ は $\mathbb{C}$ 内の開集合で，$R(z, A)$ は $\mathscr{L}(X)$ に値をとる関数として $\rho(A)$ で

正則であることが知られている．

1 節では，(5) のように Maclaurin 展開（べき級数展開）から $A \in \mathscr{L}(X)$ に対して半群 $U(t) = e^{tA}$ を定めたが，級数が収束することを示すのは $A \in \mathscr{L}(X)$ でないと厳しそうである．一方，A が $\mathscr{L}(X)$ に属していなくても，適切な $z \in \mathbb{C}$ に対してレゾルベントが $\mathscr{L}(X)$ に属す場合がある．そこで，べき級数展開に依らない，レゾルベントを用いた表示法を考えよう．Cauchy の積分公式 (9) に着想を得て，まずは $A \in \mathscr{L}(X)$ に対して f を $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ を含む開集合 D で正則な関数とし，$f(A)$ を次で定める：

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) R(z, A)\, dz.$$

ただし, C はレゾルベント集合 $\rho(A)$ に含まれる閉曲線 (の集まり) で, $\sigma(A)$ を C の内部 (C) に含むものとする．この積分を A と f に関する **Dunford 積分**という．各 $t > 0$ に対して，$f(z) = e^{tz}$ は $\mathbb{C}$ で正則であるから，Dunford 積分を用いれば，$A \in \mathscr{L}(X)$ に対して e^{tA} は

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{tz} R(z, A)\, dz \tag{10}$$

と表示できる．

次節では，必ずしも $\mathscr{L}(X)$ に属さない A に対して (10) の右辺によって与えられる作用素が半群となることを見よう．それは，複素関数論における諸定理を利用して示すことができる．

4. 解析半群

$A \in \mathscr{L}(X)$ に対して (5) によって定めた $U(t) = e^{tA}$ を思い出そう．(5) の右辺の級数は，X が複素 Banach 空間であれば，$t \in \mathbb{C}$ であっても $\mathscr{L}(X)$ において収束する．つまり，(5) によって定めた $U(t) = e^{tA}$ は $\mathscr{L}(X)$ に値をとる関数として解析的である．そこで，X を複素 Banach 空間とし，(10) の右辺によって与えられる作用素が半群であるだけでなく，解析的であるかどうかにも注意しながら話を進めていこう．

今，複素平面 $\mathbb{C}$ 上の角領域を

$$\Sigma_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \gamma,\ z \neq 0\}$$

とおく．また，任意の $\varepsilon \in (0, \gamma)$ に対して，$\Sigma_\gamma^\varepsilon := \Sigma_{\gamma-\varepsilon}$ とおく．複素 Banach 空間 X における線形作用素 A が次の条件 (H1)–(H2) を満たすとき，$A \in \mathscr{H}(\gamma)$ と表すことにする．

(H1) A は $D(A)$ が X で稠密な閉作用素である．

(H2) ある $\gamma \in (0, \pi/2)$ が存在して $\Sigma_{\pi/2+\gamma} \subset \rho(A)$ であり，かつ任意の $\varepsilon \in (0, \gamma)$ に対して

$$\|R(z, A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|z|} \quad (z \in \Sigma_{\pi/2+\gamma}^\varepsilon) \tag{11}$$

となるような定数 $M_\varepsilon > 0$ が存在する．

$A \in \mathscr{H}(\gamma)$ に対して

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{tz} R(z, A)\, dz \quad (t > 0) \tag{12}$$

とおこう．ただし，積分路の曲線 Γ は図 1 のように取る．ここで，積分路 Γ が角領域 $\Sigma_{\pi/2+\gamma}^\varepsilon$ の境界と一致している部分での積分については，積分路が無限遠まで延びているため注意が必要であるが，(11) を利用すれば，(12) の右辺の積分は各 $t > 0$ に対し $\mathscr{L}(X)$ において収束することが確認できる．また，$\Sigma_{\pi/2+\gamma}^\varepsilon \subset \rho(A)$ であるから，(12) における被積分関数 $e^{tz} R(z, A)$ は $\mathscr{L}(X)$ に値をとる関数として $\Sigma_{\pi/2+\gamma}^\varepsilon$ で正則である．このとき，Cauchy の積分定理[*1)]から，積分の値は Γ の取り

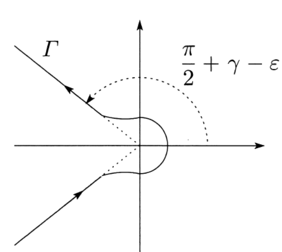


図 1　積分路 Γ.

*1)　f が単連結領域 D で正則ならば，D 内の区分的に滑らかな閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

が成り立つ．

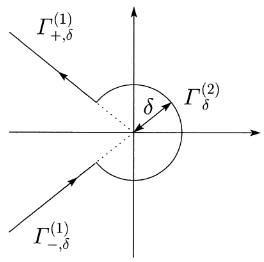


図2　積分路 Γ_δ.

方に依らないことに注意しよう．つまり，$\delta > 0$ に対して

$$\Gamma^{(1)}_{\pm,\delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \pm\phi_\varepsilon,\ |z| \geq \delta\},$$
$$\Gamma^{(2)}_{\delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| \leq \phi_\varepsilon,\ |z| = \delta\}$$

（ただし，$\phi_\varepsilon = \pi/2 + \gamma - \varepsilon$）とし，$\Gamma$ として $\Gamma_\delta = \Gamma^{(1)}_{-,\delta} \cup \Gamma^{(1)}_{+,\delta} \cup \Gamma^{(2)}_{\delta}$（図 2 を参照）をとっても，(12) の積分の値は変わらない．

【$U(t)$ の有界性】

ある定数 $K > 0$ が存在して，

$$\|U(t)\| \leq K \ \ (t > 0) \tag{13}$$

となることを示そう．$t > 0$ を固定し，積分路として $\Gamma_{1/t}$ を取る．$\Gamma^{(1)}_{\pm,1/t}$ 上の積分を $J^{(1)}_{\pm}$，$\Gamma^{(2)}_{1/t}$ 上の積分を $J^{(2)}$ とすると，$J^{(1)}_{\pm}$ は (11) を利用すれば

$$\begin{aligned}\|J^{(1)}_{\pm}\| &\leq \frac{M_\varepsilon}{2\pi}\int_{1/t}^{\infty} \frac{e^{-tr\sin(\gamma-\varepsilon)}}{r}\,dr \ \ (r = |z|) \\ &= \frac{M_\varepsilon}{2\pi}\int_{\sin(\gamma-\varepsilon)}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s}\,ds \end{aligned} \tag{14}$$

と評価できる．$J^{(2)}$ に関しては，$z = (1/t)e^{i\theta}$ と表せるので，$|z| = 1/t$, $|dz| = (1/t)\,d\theta$ に注意して (11) を利用すれば

$$\|J^{(2)}\| \leq \frac{M_\varepsilon}{2\pi}\int_{-\phi_\varepsilon}^{\phi_\varepsilon} e^{\cos\theta}\,d\theta \tag{15}$$

と評価できる．以上から (13) を得る．

【$U(t)$ が半群であること】

まず，(S1) が成り立つことを示そう．Γ, Γ' を図 3 のように取り，

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{tz}R(z, A)\,dz,$$

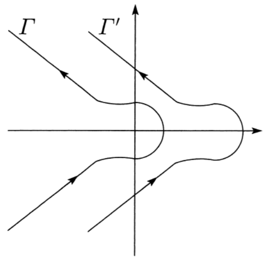


図 3　積分路 Γ と Γ'.

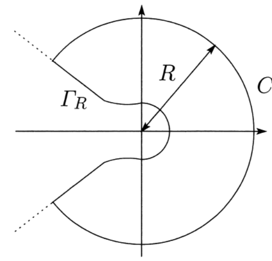


図 4　積分路 Γ_R と C_R.

$$U(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}e^{s\zeta}R(\zeta,A)\,d\zeta$$

とする．レゾルベント方程式 $R(z,A)R(\zeta,A)=\{R(z,A)-R(\zeta,A)\}/(\zeta-z)$ が成り立つことに注意すれば，

$$\begin{aligned}&U(t)U(s)\\&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_\Gamma\int_{\Gamma'}e^{tz+s\zeta}R(z,A)R(\zeta,A)\,d\zeta dz\\&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\left\{\int_\Gamma\left(\int_{\Gamma'}\frac{e^{s\zeta}}{\zeta-z}\,d\zeta\right)e^{tz}R(z,A)\,dz\right.\\&\qquad\left.-\int_{\Gamma'}\left(\int_\Gamma\frac{e^{tz}}{\zeta-z}\,dz\right)e^{s\zeta}R(\zeta,A)\,d\zeta\right\}.\end{aligned}$$

ここで，Cauchy の積分公式と Cauchy の積分定理を利用すると，$z\in\Gamma,\zeta\in\Gamma'$ に対して

$$\int_{\Gamma'}\frac{e^{s\zeta}}{\zeta-z}\,d\zeta=2\pi i\,e^{sz},\quad\int_\Gamma\frac{e^{tz}}{\zeta-z}\,dz=0$$

を得るので，$t>0,s>0$ に対して，

$$\begin{aligned}U(t)U(s)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{(t+s)\zeta}R(z,A)\,dz\\&=U(t+s)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\{U(t)\}_{t>0}$ に加えて $U(0)=I$ とおけば，$\{U(t)\}_{t\geq 0}$ は (S1) を満たす．

次に，(S2) が成り立つことを示そう．有界性が得られているので，任意の $u_0\in X$ に対して，

$$U(t)u_0\to u_0\ \ (t\searrow 0)\tag{16}$$

を示せばよい．さらに，$U(t)$ の有界性と $D(A)$ が X で稠密であることから，$u_0\in D(A)$ に対して (16) を示せばよいことがわかる．積分路として図 1 のような Γ を取ると，

$$u_0=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{tz}}{z}\,dz$$

と表せるので，$I=R(z,A)(zI-A)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}&U(t)u_0-u_0\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{tz}}{z}R(z,A)Au_0\,dz\\&\to\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{z}R(z,A)Au_0\,dz\ \ (t\searrow 0).\end{aligned}$$

ここで，図 4 のような積分路を取り，その内部では $R(z,A)/z$ が正則であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\frac{1}{z}R(z,A)\,dz&=\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{1}{z}R(z,A)\,dz\\&=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z}R(z,A)\,dz\\&=\lim_{R\to\infty}O\left(\frac{1}{R}\right)=0.\end{aligned}$$

よって，$u_0\in D(A)$ に対して (16) を得るので，$\{U(t)\}_{t\geq 0}$ は (S2) を満たす．

以上から，$U(t)$ が半群であることがわかる．

【$U(t)$ の導関数の評価】

(11) を利用すれば，$U(t)$ が微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}U(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma ze^{tz}R(z,A)\,dz$$

となることが確かめられる．ここで，

$$\frac{d}{dt}U(t)=AU(t)\tag{17}$$

を示そう．$AR(z,A)=zR(z,A)-I$ より，

$$\|AR(z,A)\|\leq M_\varepsilon+1\ \ (z\in\Sigma^\varepsilon_{\pi/2+\gamma})$$

を得るので，$e^{tz}AR(z,A)$ の Γ 上での積分は各 $t>0$ に対して収束する．また，A が閉作用素で

あることから，$U(t) \in D(A)$ を得る．さらに

$$AU(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{tz}AR(z,A)\,dz.$$

したがって，

$$\begin{aligned} AU(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{tz}AR(z,A)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\Gamma ze^{tz}R(z,A)\,dz - \int_\Gamma e^{tz}I\,dz\right\} \\ &= \frac{d}{dt}U(t) \end{aligned}$$

となり (17) を得る．このとき，(14), (15) を得たのと同様の評価を行なえば，ある定数 $K>0$ が存在して，

$$\left\|\frac{d}{dt}U(t)\right\| = \|AU(t)\| \le \frac{K}{t} \quad (t>0)$$

となることが導かれる．

【$U(t)$ の Σ_γ への解析的延長】

$\gamma \in (0,\pi/2)$ とする．半群 $\{U(t)\}_{t\ge 0}$ が

(AS1) 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の角領域 Σ_γ に $\mathscr{L}(X)$ に値をとる関数として解析的に延長できる．

(AS2) 任意の $\varepsilon \in (0,\gamma)$ に対して，$t \in \Sigma_\gamma^\varepsilon$, $|t| \to 0$ であれば，（延長された）$U(t)$ が I に強収束する．

を満たすとき，$\{U(t)\}_{t\ge 0}$ を γ 型の**解析半群**という．

(12) で定められた半群 $\{U(t)\}_{t\ge 0}$ は，γ 型の解析半群となることを確認しよう．実際，$\varepsilon \in (0,\gamma/2)$ に対して $|\arg t| \le \gamma - 2\varepsilon$ とするとき，(13) を示したのと同様にして，各 $\varepsilon > 0$ に対し，$t \in \Sigma_{\gamma,\varepsilon}^{2\varepsilon} := \Sigma_\gamma^{2\varepsilon} \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \ge \varepsilon\}$ に関して一様に積分が収束することを示すことができる．このとき，$\Sigma_{\gamma,\varepsilon}^{2\varepsilon}$ で正則であることも得られるので，$\varepsilon > 0$ の任意性と一致の定理[*2)]から，Σ_γ への $U(t)$ の解析接続が得られる．さらに，$t \in \Sigma_\gamma^\varepsilon$, $|t| \to 0$ のとき $u_0 \in X$ に対して (16) が成り立つことも $t>0$ の場合と同様にして示すことができる．したがって，(12) で定められる $U(t)$ は解析半群である．

以上から，$A \in \mathscr{H}(\gamma)$ に対して解析半群 $U(t)$ が生成されることがわかった．(10) の表記に倣えば，$U(t) = e^{tA}$ と表すことができる．

5. 抽象的発展方程式とその応用

抽象的発展方程式の初期値問題 (8) を思い出そう．初期値問題 (8) の解としては，X を複素 Banach 空間とするとき，

$$\begin{aligned} &u \in C([0,\infty);X) \cap C^1((0,\infty);X), \\ &Au \in C((0,\infty);X) \end{aligned}$$

を満たすものを考えるわけであるが，4 節から，$A \in \mathscr{H}(\gamma)$ であれば，解析半群 e^{tA} が生成され，$u_0 \in X$ に対して $u(t) = e^{tA}u_0$ が求める解となる（証明はしないが一意性も得られる）．

偏微分方程式への応用を考えよう．その一例として，関数 $u(x,t)$ を未知関数とする放物型方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u & (x \in \Omega,\ t>0), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & (t>0), \\ u|_{t=0} = u_0 & (x \in \Omega) \end{cases} \tag{18}$$

を考える．ただし，Ω は $\mathbb{R}^m$ における滑らかな境界をもつ領域，$\mathcal{A}u$ は 2 階楕円型偏微分作用素

$$\mathcal{A}u := \sum_{i,j=1}^m (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i}$$

とし，a_{ij} は楕円性の条件や有界性など然るべき仮定を満たすとする．ここで，$X = L^2(\Omega)$（複素），$V = H_0^1(\Omega)$（Sobolev（ソボレフ）空間 $H^1(\Omega)$ における $C_0^\infty(\Omega)$ の閉包）とし，準双線形形式 $\mathcal{I}(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{I}(u,v) := \sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_j}\overline{v_{x_i}}\,dx$$

によって定めると，任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$\mathcal{I}(u,\psi) = (f,\psi)_{L^2(\Omega)} \quad (\psi \in V) \tag{19}$$

*2) f, g は領域 D で正則とする．集合 $\{z \in D \,|\, f(z) = g(z)\}$ が D 内に集積点をもてば，D で $f \equiv g$.

を満たす $u \in V$ が一意に存在することを示すことができる．対応 $f \mapsto u$ を $u = \Phi f$ と表すことにすると，Φ は $L^2(\Omega)$ から Φ の値域への線形写像であり全単射となる．そこで，$A := \Phi^{-1}$ とし，

$$D(A) := \{u \in V \mid f \in X \text{ に対し (19) を満たす}\}$$

とする．$D(A) \subset V$ より，$u \in D(A)$ であれば一般化された意味で $u|_{\partial\Omega} = 0$ が成り立つ．また，

$$C_0^\infty(\Omega) \subset D(A), \quad A|_{C_0^\infty(\Omega)} = \mathcal{A}|_{C_0^\infty(\Omega)}$$

を得る．したがって，上記のように X, A, $D(A)$ を設定すると，放物型方程式の初期値境界値問題 (18) が $u : [0,\infty) \to L^2(\Omega)$, $t \mapsto u(\cdot,t)$ に対する抽象的発展方程式の初期値問題 (8) に定式化される．詳細は述べないが $A \in \mathscr{H}(\gamma)$ であることが確認できるので，この A は解析半群 e^{tA} を生成する．よって，任意の $u_0 \in X$ に対して一意な解 $u(t) = e^{tA}u_0$ を得る．

6. おわりに

この原稿の執筆に際し文献 1,2,5) を参考にした．より詳しく学びたい読者はそれらを読むと良いだろう．また，今回偏微分方程式への応用にはあまり誌面をさけなかったが，解析半群は偏微分方程式の解析にとって有用である．それらについてさらに知識を深めたい読者には文献 3,6) を読むことを勧めたい．3) では流体方程式，6) では様々な現象に現れる偏微分方程式を解析するための理論の基盤が，解析半群を用いて構成されている．

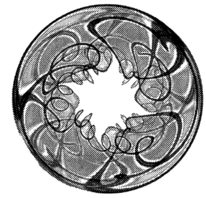
参考文献

1) 藤田宏，黒田成俊，伊藤清三，『関数解析』，岩波書店，1991.
2) 増田久弥，『発展方程式』，紀伊國屋書店，1975.
3) 柴田良弘，久保隆徹，『非線形偏微分方程式』，朝倉書店，2012.
4) 高橋陽一郎，『微分方程式入門』，東京大学出版会，1988.
5) 田辺広城，『発展方程式』，岩波書店，1975.
6) 八木厚志，『放物型発展方程式とその応用（上），（下）』，岩波書店，2011.

（こうさか・よしひと，室蘭工業大学工学部）

変分解析と弱解

超関数の導入



長澤 壯之

1. 関数から測度へ

Gaußは,「学問の深遠さは,どの程度数学を用いているかで分かる.」という趣旨のことを述べたらしい.少なくとも,自然科学については正しいだろう.それは,自然科学の多くの現象を数学の言葉で表現することができるからである.その道具として**関数**がある.

例えば,寒暖という概念がある.これを定量的に表したものが温度という関数である.温度は場所ごとに異なるし,時間の経過と共に変化し得る.従って,x という場所の時刻 t に観測された温度は,(x,t) の関数である.

しかし,自然科学に現れるすべてが直接観測できるとは限らない.その一つが密度である.物理学などで「物質 M の場所 x の密度を $\rho(x)$ とする.」などというが,密度 $\rho(x)$ なるものは直接観測できない.実際に観測できるものは,質量である.x における密度は,次のように定義される.x を含む部分 A の質量 $m(A)$ を測り,それを A の体積で割り,A における単位体積あたりの質量を計算する.その量の $A\to\{x\}$ という極限値が x における密度である.

$$\rho(x)=\lim_{A\to\{x\}}\frac{m(A)}{|A|}\quad(|A|\text{ は }A\text{ の体積}).$$

密度を積分すれば質量が得られる.

$$m(A)=\int_A\rho(x)\,dx.$$

換言すれば,$m(A)$ を $|A|$ で微分したものが $\rho(x)$ であるので,上で書いた極限操作を形式的に

$$\rho(x)=\left.\frac{dm(A)}{d|A|}\right|_{A=\{x\}}$$

で表そう.質量 $m(A)$ という積分量を観測し,A を様々に取り替えることで密度 ρ を間接的に理解しているといってよい.

A という部分を互いに重なり合わないように分割し,それぞれの質量を測って総和をとれば,A の質量になる.すなわち,質量 $m(\cdot)$ は,$A_j\cap A_k=\emptyset\ (j\neq k)$ であれば,

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}m(A_j)$$

という性質を持っている.

一般に集合 A から $\mathbb{R}$ への写像 μ が,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)$$

を満たすものを**測度**という(厳密には各 A_j に可測性という性質が必要であるが,本稿では,厳密さにはあまり拘らない).このような性質を持つものの一番簡単な例は,A の体積 $\int_A dx$ である.また,A を事象と考えれば,その確率 $P(A)$ もこの性質を持つ.

関数 f が与えられれば,

$$\mu_f(A)=\int_A f(x)\,dx$$

により μ_f を定義すれば,これは測度になる(ここでも,厳密には A や f に可測性と呼ばれる性質が必要である).f と μ_f を同一視すれば,関数は測度と考えることができる.f と $f\,dx$ の同一視と思ってもよい.

測度 μ が与えられたとき,A に依らない関数 f が存在して,

$$\mu(A)=\int_A f(x)\,dx$$

が成り立つとき,f を μ の**密度関数**という.質量 m の密度関数は密度 ρ である.質量と密度の関係から類推できるように,密度関数は測度の「微分」

$$f(x)=\left.\frac{d\mu(A)}{d|A|}\right|_{A=\{x\}}=\frac{d\mu}{dx}$$

である．

関数が必ずしも微分可能であるわけでないのと同様に，測度に対して密度関数が常に存在するとは限らない．例えば，

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & (0 \in A \text{ のとき}), \\ 0 & (0 \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

で δ を定義すれば，これは測度であることは容易に分かる．δ に密度関数 f が存在したとする．

$$\delta(A) = \int_A f(x)\,dx$$

が任意の A に対して成り立つ．$0 \notin A$ であれば，左辺，従って右辺も 0 であるので，$x \neq 0$ のとき $f(x) = 0$ でなければならない．すなわち f は，原点を除き 0 である．従って，

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\{0\}} f(x)\,dx = 0$$

である．これは，$A \ni 0$ のとき，$\delta(A) = 1$ に矛盾する．

関数から測度を構成することはできるが，その逆は必ずしも正しくないという意味で，測度は関数の概念を拡げたものと考えられる．

2. 測度から超関数へ

測度 μ が与えられたら，それによる関数 φ の積分 $\int \varphi\,d\mu$ が（Lebesgue 式に）定義される．μ の密度関数が f である場合は，$f = \frac{d\mu}{dx}$ であることから，

$$\int \varphi\,d\mu = \int \varphi(x)f(x)\,dx$$

となる．

先に例として挙げた δ は，密度関数を持たないが，積分は，

$$\int \varphi\,d\delta = \varphi(0)$$

で定義される．δ は **Dirac のデルタ測度**と呼ばれる．

φ として，A 上で 1，他で 0 という関数（A の**特性関数**という）χ_A を考えれば，$\mu(A) = \int \chi_A\,d\mu$ である．密度，あるいは測度を理解するためには A をいろいろ取り替える必要があった．上に書いたことから，これは φ をいろいろ取り替えて $\int \varphi\,d\mu$ を考えればよいことが分かる．この量を $T(\varphi)$ で表そう．T は関数から積分値という実数を対応させる写像である．積分の性質から，この写像は，

(1) c を定数とするとき，$T(c\varphi) = cT(\varphi)$，

(2) $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$

を満たす（**線形性**）．もちろん，積分が発散しないよう φ には適当な仮定を課す必要がある．φ をいろいろ取り替えても $T(\varphi)$ が発散しないようにするための仮定を考える．

T が密度関数 f を持つ測度による積分で表される場合，すなわち

$$T(\varphi) = \int \varphi(x)f(x)\,dx$$

の場合を考えよう．Cauchy–Schwarz の不等式により，

$$|T(\varphi)| \leqq \left(\int |\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

となる．よって，$T(\varphi)$ が収束するために φ と f に同等な性質を仮定するならば，$\int |\varphi|^2 dx < \infty$, $\int |f|^2 dx < \infty$（**2 乗可積分性**という）を課せばよい．似たようなものに Hölder の不等式

$$|T(\varphi)| \leqq \left(\int |\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

がある．但し，p と q は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす定数である．$p = q = 2$ の場合が Cauchy–Schwarz の不等式である．$p < 2$ のときは $q > 2$ となる．Hölder の不等式は，f の可積分性が 2 からずれて q 乗可積分であっても，φ の可積分性はそれに見合う分ずれて p 乗可積分であれば，$T(\varphi)$ が収束することを意味する．f の性質が多少悪くても φ がそれを補ってくれれば $T(\varphi)$ が定義されるというわけだ．国民的人気アニメ「サザエさん」に登場するノリスケ叔父さんは，多少頼りないところがあるが，タイ子さんがよくできた奥さんであるため，夫婦円満に収まっているという構図と同じである．

φ が「とてもよい奥さん」であれば，関数や測度とはいえないような「だめ亭主」であっても $T(\varphi)$ は定義できるのではないか？ その考えが，**超関数**である．よい関数とは，微分や積分の操作が何回でもできるものとしよう．そこで

$$\mathscr{D} = \{\psi \in C^\infty \mid \mathrm{supp}\ D^\alpha\psi \text{ は有界}\}$$

なる関数の集合を考え，φ はこの集合の元とする．ここで，$D^\alpha\psi$ は ψ の α 階の導関数であり，supp とは，関数 ψ に対し，

$$\mathrm{supp}\ \psi = \overline{\{x \mid \psi(x) \neq 0\}}$$

で定義される集合のことで ψ の**台**という．台が有界な連続関数は，積分可能である．従って，$\mathscr{D}$ に属する関数は，微分積分学的にこの上なくよい関数である．この関数が「御せる」 T を（Schwartz の）**超関数**とい

う．ここで，「御せる」とは T が $\mathscr{D}$ から実数への写像で，先に述べた線形性と次の意味での**連続性**を持つことをいう．$\mathscr{D}$ 内の関数列 $\{\varphi_n\}$ が，$n \to \infty$ のとき 0 に収束するとは，n に依存しない有界閉集合 K が存在して，$\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ となり，任意の α に対し，$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi_n(x)| \to 0$ となることをいう．T が $\mathscr{D}$ 上で**連続**であるとは，$\varphi_n \to 0$ のとき，$T(\varphi_n) \to 0$ を満たすことをいう．

測度が超関数であることは，積分の性質から知ることができる．例えば，Dirac のデルタ測度が線形性と連続性を有することは，容易に示される．従って，超関数は測度をさらに一般化したものと言える．

超関数の英語や仏語の単語は，distribution である．その意味を辞書で調べれば，「分布」や「分配」とある．密度は質量の「分布」を表すものである．Schwartz[6] が超関数を distribution と呼んだのは，密度を一般化したものという意識があったのだろう．

3. 不届き者 超関数

一般に関数は，微分できるとは限らない．しかし，微分の意味を弱めることで，超関数に対しても微分を考えることができる．それは，T の相方 φ に微分を委ねるのである．実によくできた奥さんである．

再び，

$$T(\varphi) = \int \varphi(x) f(x)\, dx$$

の場合を考える．f が微分可能な関数である場合，部分積分の公式により，

$$\int \varphi(x) Df(x)\, dx = -\int D\varphi(x)\, f(x)\, dx$$

となる．ここで，φ の台が有界であることを用いた．$\varphi \in \mathscr{D}$ のとき，$D\varphi \in \mathscr{D}$ であるので，右辺で与えられる $\varphi \in \mathscr{D}$ から実数への写像は超関数を定義する．これから超関数 T に対し，$\varphi \mapsto -T(D\varphi)$ で定義される超関数を**弱微分** DT と呼ぶ．一般に α 階の弱微分 $D^\alpha T$ は，

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)$$

で定義される超関数である．ここで，$|\alpha|$ は微分の階数である．

超関数が微分可能関数のときは，弱微分は通常の微分と一致する．

超関数は，微分積分可能性をすべて相方の φ に肩代わりさせるという不届き者ではあるのだが，相方を自由に取り替えることができるため，後で述べるように変分解析や関数方程式の舞台では力を発揮する．

4. 変分問題・変分解析

超関数は，相方がいなければロクに微分も積分もできない（かもしれない）ロクでなしである．そんなものが何かの役に立つのだろうか？ ロクでなしが役立つ舞台に，変分解析や関数方程式の解析がある．この節では，前者について述べよう．

ものの形状はどのように決まるのかという素朴な問題を考えよう．シャボン玉（石鹸膜）は丸い．それは，丸い形が安定だからである（図 1）．

一方で，ヒトの赤血球は，血清中では丸い形でなく真中が凹んだ形をしている（図 2）．赤血球膜にとっては，この形が安定であり，それに比べて丸い形は安定でないことを意味する．すなわち，石鹸膜と赤血球膜では，「安定」の意味が異なるのである．それぞれの膜の不安定性を測る量（**エネルギー**と呼ぶ）があり，そ



図 1　シャボン玉（写真：Serge Melki）．



図 2　赤血球膜．

れを最小化する（すなわち，最も安定）になるように形状が決まると考えるのが自然であろう．石鹸膜と赤血球膜ではエネルギーが異なるので，安定な形状も異なるというわけだ．

膜の形状を考えるには，膜を閉曲面 Σ と考え，Σ からエネルギーという実数を対応させる写像 $E(\Sigma)$ を考える．Σ をいろいろ取り換えて $E(\Sigma)$ を最小にする閉曲面を求めたい．これが，**変分問題**の一例である．

一般に，数学上のある対象物の集合 X から実数への写像 E を考える．上の例では X は閉曲面の集合である．曲面を関数のグラフと考えれば，ある条件を満たす関数の集合と考えてもよい．そこで，X は適当な関数の集合としよう．変分問題とは，$E(u)=\min_{v\in X}E(v)$ を満たす関数 $u\in X$ を探すことであり，その方法が**変分解析**である．高等学校で関数の最小値を与える点を求めるという問題を学習したであろう．その候補として，まず関数の微分係数が 0 となる点を求めたと思う．変分問題についても同様の手順を踏み，E の微分が 0 になるような u を探すことを考える．ここで，E の微分とは次のように定義される．ϵ を $|\epsilon|$ が十分小さな実数とし，$u+\epsilon\varphi$ を考える．φ は $u+\epsilon\varphi\in X$ となるものとする．$E(u+\epsilon\varphi)$ は，ϵ の関数となる．そこで，これの ϵ に関する微分を E の u における φ 方向の微分とし，**第一変分**という．変分問題の解の候補 u は，$u+\epsilon\varphi\in X$ となるあらゆる φ に対して，

$$\frac{d}{d\epsilon}E(u+\epsilon\varphi)\bigg|_{\epsilon=0}=0$$

を満たす．これは **Euler–Lagrange 方程式**と呼ばれる．左辺の量は φ について線形である．φ として $\mathscr{D}$ の元が採用できて，第 2 節で述べた意味で連続性を有しているならば，$T_u(\varphi)$ という超関数を定義する．T_u と書いたのは，u から決まる超関数という意味を込めた．Euler–Lagrange 方程式は，超関数の意味で $T_u=0$ という式になる．このような u を元の変分問題の**弱解**という．

弱解は超関数であるので，素性がよく分からない．素性が明らかにされた弱解を**解**と呼びたい．これを，具体的な変分問題で解説しよう．

シャボン玉のように境界のない石鹸膜は，解説がややこしくなるので，境界付きの石鹸膜を考えよう．針金で枠を作り，それに石鹸膜を張ると考えればよい．枠は空間内の曲線であるが，それが $z=f(x,y)$ で与えられるグラフであるとしよう．ここで，(x,y) はある領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の点とする．石鹸膜は，Ω 上の関数 $u=u(x,y)$ のグラフであるとする．石鹸膜は，膜の表面積が最小になるように張られるので，表面積をエネルギーとする変分問題の解である．表面積は

$$E(u)=\int_\Omega\sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dxdy$$

で与えられる．膜は枠にくっついているので，$\partial\Omega$ 上では $u=f$ でなければならない．すなわち，

$$X=\{v \text{ は } \bar{\Omega} \text{ 上の関数} \mid \partial\Omega \text{ 上で } v=f\}$$

とし，

$$E(u)=\min_{v\in X}E(v)$$

を満たす u を求めたい．X の元については，表面積が確定する程度の性質を課すが，本稿では詳細は述べない．E の第一変分を計算しよう．φ を $\bar{\Omega}$ 上の関数で，$\partial\Omega$ 上で 0 となる（滑らかな）関数とする．$u\in X$ であれば $u+\epsilon\varphi\in X$ である．微分と積分の順序交換ができるのかというデリケートな問題があるが，本稿ではおおらかにそれを認めると，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\epsilon}E(u+\epsilon\varphi)\bigg|_{\epsilon=0}\\&=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial\epsilon}\sqrt{1+|\nabla(u+\epsilon\varphi)|^2}\,dxdy\bigg|_{\epsilon=0}\\&=\int_\Omega\frac{\nabla u\cdot\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,dxdy\end{aligned}$$

となる．$\partial\Omega$ 上で $\varphi=0$ であることを用いて部分積分すれば，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\epsilon}E(u+\epsilon\varphi)\bigg|_{\epsilon=0}\\&=-\int_\Omega\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)\varphi\,dxdy\end{aligned}$$

となる．すなわち，$T_u=-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$ である．ここで現れる u の微分を弱微分の意味で考えて，$T_u=0$ を満たす超関数が弱解であり，古典的な微分の意味で $T_u=0$ を満たすものが解である．

第一変分 $=0$ は，エネルギーの最小値を実現するための必要条件であるが十分条件ではない．（弱）解が存在したとして，それがエネルギーの最小値を実現しているかは，個別に確認しなければならない．本稿では，その解析については割愛する．

変分問題・変分解析については，ほんの触りの部分しか触れていない．文献 3) には，このテーマについてあらゆることが書かれている．手っとり早く，全体像をつかみたければ，本誌の記事[7)]がよい．石鹸膜に関する数学的な解析を知るには，文献 4, 5) がいいだろう．

5. 不届き者が役立つとき

$T_u = 0$ を満たす u を如何に求めるか？ 石鹸膜の例では，これは，u に関する偏微分方程式になる．偏微分方程式を含む関数方程式を解く際に，不届き者の超関数が役立つのである．上で述べたように，解には，超関数の意味の弱解と，方程式に現れる導関数を古典的な意味で持つ解の概念がある．手続きは，まず弱解を探し，その古典的な意味での微分可能性を調べるという手順を踏む．何とも回りくどいようだが，以下に述べるように理にかなっているのである．それは，

「探し物は，広いところを探せ.」

という考え方だ．これは，ちょっと常識とずれているかもしれない．狭いところを探すほうが楽だからである．太平洋に落とした10円玉を探す手間と，水たまりに落とした10円玉を探す手間を想像すればよい．しかし，これには，「10円玉が落ちている.」という事が大前提である．落ちているかどうか分からない物を探すためには，狭いところより，広いところを探す方が見つかる確率は高いと考えられる．太平洋には財宝が沈んでいるかもしれないが，水たまりに財宝が眠っている可能性はほとんどないであろう．

$T_u = 0$ の（弱）解は，存在するか否か，直ちには分からない．そこで，広いところを探してみようということになる．近代的手法では，関数方程式 $T_u = 0$ の解は，ある一定の性質を持つ超関数のなす無限次元の線形空間で，関数解析学という道具を駆使して探し出す．関数は，超関数であるが，逆は必ずしも正しくないので，超関数の集合と，微分可能な関数の集合は，前者のほうが圧倒的に広い．超関数（不届き者かもしれない）の集団からなる広い空間で考えると，（弱）解の存在が証明し易いのである．方程式に現れる導関数を古典的な意味で持つ関数からなる線形空間では，解の存在を直接証明することが難しいのである．

しかし，所詮，超関数は不届き者である．得られた弱解は，古典的な意味では $T_u = 0$ を満たしていないかもしれない．太平洋から財宝と思って引き揚げたものが，紛い物である可能性があるというわけだ．さらに，空間が広すぎると，弱解（= 真の解の候補）がありすぎるということもあろう．引き揚げた物が，真に財宝であるかは，磨いて光ってくれるかどうかを確かめればよい．

これに当たる作業が，弱解の正則性を調べるという

ものである．例えば，弱解の微分可能性を調べるには，差分を計算し，その極限があるかどうか調べるのである．方程式の真の解になるに十分な微分可能性があるか，十分でない場合はどの程度まで微分可能なのか，微分できない点からなる集合はどこに存在するか，どのくらい大きいのかあるいは小さいのか⋯．未解決問題が山積している分野である．

これは，変分問題から派生する方程式に限った問題ではない．非圧縮性流体の運動方程式であるNavier–Stokes方程式は，弱解の正則性や一意性の問題が未解決で，Clay数学研究所が提出した懸賞問題になっていることは，多くの読者が知るところであろう．弱解の存在は1930年代に既に証明されているが，その一意性は未解決である．弱解が存在する関数空間より狭い空間で定義される強解については，一意性は証明できるが，存在が不明である．弱解が存在する関数空間と，強解が存在する関数空間の間に，存在と一意性の両方を担保する適切な関数空間が存在するのだろうか？

偏微分方程式の弱解の正則性については，標準的な偏微分方程式論の教科書（例えば文献1)）に書かれている．変分問題において，エネルギーを最小にする弱解の正則性については，文献2)がいいだろう．誤植が多いのであるが，逆説的にいうと，丹念に誤植を正しながら読むと相当勉強になる．

6. 関数解析学

20世紀以降に大きく発展した数学の分野の一つが関数解析学である．上で述べたように，関数方程式を解く為の手法に関数解析学が用いられる．関数方程式でなく，代数方程式 $f(x)=0$ を考えてみよう．2次方程式などと違って，解の公式がない場合は，どのように解いたらいいだろうか？ 一つの方法として，Newton法がある．x_0 を与え，

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

で $\{x_n\}$ を定義し，$\lim_{n\to\infty} x_n$ とすることで解を求める方法である．f' は導関数であるので，微分の手法が用いられている．連立方程式を解く際は，近似方程式を解くとき，係数行列の逆行列が必要になるなど，線形代数学の知識も必要である．このように，代数方程式の解法には，$\mathbb{R}^n$（または $\mathbb{C}^n$）上の微分積分学・線形代数学を駆使する．

関数方程式 $F(x,u(x))=0$ を解く際も，基本的には同じである．土表を $\mathbb{R}^n$（または $\mathbb{C}^n$）から適当な性質を持つ超関数の集まりである関数空間に変え，その上で微分積分学・線形代数学を使うのである．但し，関数空間という無限次元の空間であるので，その上の微分積分学・線形代数学を「関数解析学」と呼ぶに過ぎない．関数解析学は，抽象的ゆえ，好き嫌いが分かれる分野である．嫌いな人，あるいは，敷居が高いと思っている人は，関数解析学に現れる定義や定理を有限次元の空間の場合に書きなおしてみることを薦める．微分積分学や線形代数学で学んだ内容に帰着されることが多い．例えば，Hilbert空間のRieszの表現定理を $\mathbb{R}^n$ の場合に書きなおしてみれば，当り前の主張であることが分かる（但し，無限次元空間では，証明は当り前では済まない）．

偏微分方程式論の良書の一つのEvansの書籍[1)]に次のような記述がある．

We will later see that the really hard work is not so much the invocation of functional analysis, but rather finding the “right” spaces ⋯.（後に見るように，本当の難しさは，関数解析の呪文にあるのではなく，むしろ「適切な」空間を（中略）選ぶことにある．）

変分問題から派生する方程式に限らず，多くの（非線形）関数方程式には，その問題に応じた適切な関数空間があると信じられている．そのような空間を見出すことが，この分野の研究の醍醐味といってよい．

参考文献

1) Evans, L.C., “Partial Differential Equations”, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.
2) Giaquinta, M., “Introduction to Regularity Theory for Nonlinear Elliptic Systems”, Birkhäuser, Basel, 1993.
3) Giaquinta, M. & S. Hildebrandt, “Calculus of Variations I, II”, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
4) Giusti, E., “Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variations”, Birkhäuser, Boston, 1984.
5) Morgan, F., “Geometric Measure Theory—A Biginner's Guide—”, Academic Press, Boston, 1988（邦訳：『石けん膜の数理解析—初学者のための幾何学的測度論—』，共立出版，1990）.
6) Schwartz, L., “Théorie des distributions”, 3rd Ed., Hermann, Paris, 1966（邦訳：『超函数の理論』，岩波書店，1971）.
7) 立川 篤，「変分原理・変分法・変分問題」，数理科学 **538** (2008), 6–12.

（ながさわ・たけゆき，埼玉大学大学院理工学研究科）

シュワルツ超関数と佐藤超関数



本多 尚文

1. 関数概念の拡張

関数とは，その定義域の各点 x に値 $f(x)$ を対応させる関係 f のことである．従って，各点に必ず値が定まっていなければならない．しかし，物理や工学に登場する関数（もどき）の中には，この範疇におさまらないものが多々ある．例えば，**Dirac** の δ と呼ばれる $\mathbb{R}$ 上の関数 $\delta(x)$ は，次の性質で特徴付けられている．

$$\begin{cases} \delta(x) = 0 \qquad (x \neq 0), \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $x = 0$ での関数の値は 2 番目の積分を満たすように定めるのである．しかし，それは不可能である．実際，被積分関数の 1 点での値をどのように変えても積分値は変化しないから，原点を除き 0 である関数の積分値は常に 0 である．つまり，関数でこのような条件を満たすものは存在しない．

次の公式もしばしば用いられる．**Heaviside 関数** $Y(x)$ を

$$Y(x) := \begin{cases} 0 \qquad (x < 0), \\ 1 \qquad (x \geq 0) \end{cases} \tag{2}$$

で定めると

$$\delta(x) = \frac{dY}{dx}(x) \tag{3}$$

が成り立つ．明らかに $Y(x)$ は原点で不連続である．よって，原点で微分することはできず，この公式はそもそも意味をなしていない．

最初に述べた関数の定義では，これらの事柄を正当化することは不可能である．そこで，関数概念を拡張することで，古典的な関数空間を含み，さらに，Dirac の δ をも含むようなより広い空間（超関数の空間）を構成することが試みられてきた．今日では，様々な関数概念の拡張方法が見いだされ，種々の超関数の空間が構成されている．例えば，L. Schwartz は試験関数のなす空間の双対空間を考えることにより**シュワルツ超関数**（Distributions）を構成した．また，佐藤幹夫は正則関数の境界値を考えることで**佐藤超関数**（Hyperfunctions）を構成している．最近では**コロンボ超関数**と呼ばれる非常に広い空間も知られている．本稿は，関数概念の拡張として最も良く用いられている，シュワルツ超関数と佐藤超関数に焦点を当てて解説することとする．なお，ページ数の都合から，これらの超関数の歴史的経緯やそれらに先立つ先駆的な仕事については割愛する．

2. シュワルツ超関数

シュワルツ超関数における関数概念の拡張方法は，間接的であり，初学者には判り難いと思われる．そこで，通常の関数をシュワルツ超関数と見做す方法から考察を始めることにする．

2.1 シュワルツ超関数のアイデアとその定義

まず，工学における線形応答問題を思い起こそう．線形応答問題とは，入力端子と出力端子を持つブラックボックスに対し，“様々な入力を与えその出力を観測することでブラックボックスを特定する”という問題である．シュワルツ超関数の理論は，対象となる関数をブラックボックスと考え，入力に対する出力結果でこの関数を同定するという立場をとる．

I を $\mathbb{R}$ の開区間とし，$f(x)$ を I 上の連続関数とする．以下，この f をブラックボックスと見做す方法を説明する．いくつか記号を導入する．I 上の連続関数 $\varphi(x)$ に対して

$$\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in I; \varphi(x) \neq 0\}} \tag{4}$$

と定める．$\mathrm{supp}(\varphi)$ は関数 φ の**台集合**[*1)]と呼ばれる．

さて，$\mathscr{D}(I)$ を，I 上の無限回微分可能関数でその台集合が I でコンパクト[*2)]となるようなもの全体の集合とする．$\mathscr{D}(I)$ を**試験関数の空間**という．この空間をシュワルツ超関数における入力の集合とする．このとき，おのおのの入力 $\varphi \in \mathscr{D}(I)$ に対し，f の定めるブラックボックスは，

$$T_f(\varphi) := \int_I f(x)\varphi(x)dx \ \in \mathbb{R} \tag{5}$$

なる実数を出力すると定める．つまり，シュワルツ超関数の理論では，f 自身を直接考えず，$\varphi \in \mathscr{D}(I)$ に対し $T_f(\varphi)$ なる出力を持つブラックボックス T_f を考え，これが関数 f を表していると見做すのである．もちろん，入力たる集合 $\mathscr{D}(I)$ は，関数 f を識別できる程度に元を豊富に持っていなければならない．つまり，異なる関数には異なるブラックボックスが対応している必要がある．それは，次の補題から確認できる．

補題 1　f と g を I 上の連続関数とし，任意の $\varphi \in \mathscr{D}(I)$ に対して $T_f(\varphi) = T_g(\varphi)$ が成り立つとする．このとき $f = g$.

関数 f に付随した T_f の満たす性質を調べてみよう．積分の性質から $T := T_f$ が**線形性**

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi) \qquad (\varphi, \psi \in \mathscr{D}(I),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

を満たすことは容易にわかるだろう．さらに，T_f は，ある種の連続性も持つ．まず，$\mathscr{D}(I)$ に属する関数からなる列 $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ の収束を定義しよう．

定義 1　関数列 φ_k が $\mathscr{D}(I)$ で 0 に収束するとは，次の 2 条件を満たすときをいう．

1. I のコンパクト集合 K が存在して $\mathrm{supp}\,\varphi_k \subset K$ $(k = 1, 2, \ldots)$.
2. 任意の $n \geq 0$ に対し $\sup_{x\in I} \left|f^{(n)}(x)\right| \to 0$ $(k \to \infty)$.

このとき $\varphi_k(x) \to 0$ in $\mathscr{D}(I)$ $(k \to \infty)$ と略記する．

仮に条件 2 が成立していても条件 1 が成立していなければ，それは $\mathscr{D}(I)$ の中で 0 に収束すると言えないことに注意する．例えば，$\varphi(x) \neq 0$ を台集合がコンパクトである $\mathbb{R}$ 上の無限階微分可能関数とする．関数列 $\varphi_k(x) := \dfrac{1}{k}\varphi(x-k)$ は $\mathbb{R}$ で条件 2 を満たす．一方，φ_k の台は k が大きくなるに従い無限遠方に逃げていくので条件 1 は満たさない．このような関数列 φ_k は $\mathscr{D}(I)$ で 0 に収束するとは言わないのである．このとき，積分の性質から $T := T_f$ は**連続性の条件**

$$\varphi_k \to 0 \text{ in } \mathscr{D}(I) \Longrightarrow T(\varphi_k) \to 0 \tag{7}$$

を満たす．実際，$|f(x)|$ の K での最大値を $M \geq 0$ とすると

$$|T_f(\varphi_k)| = \left|\int_I \varphi_k(x)f(x)dx\right| = \left|\int_K \varphi_k(x)f(x)dx\right| \leq \left(M\int_K dx\right)\max_{x\in K}|\varphi_k(x)| \to 0$$

が成り立つ．

ここまで，関数に付随したブラックボックスを考えてきた．それは条件 (6) と (7) を満たしている．そこで，必ずしも関数に付随しているとは限らないブラックボックス T[*3)]で，条件 (6) と (7) を満たすものは（拡張された）関数の仲間であると見做すことにする．これがシュワルツ超関数なのである．

定義 2　$\varphi \in \mathscr{D}(I)$ に対し実数 $T(\varphi)$ を対応させる対応関係 T で条件 (6) と (7) を満たすもの[*4)]を I 上のシュワルツ超関数という．$\mathscr{D}_b(I)$ で I 上のシュワルツ超関数全体の集合を表す．特に I 上の連続関数 f は (5) で定義された T_f によりシュワルツ超関数と見做すこととする．

関数に付随した超関数以外の超関数が存在することを見ておこう．S_δ を

$$S_\delta(\varphi) = \varphi(0) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})) \tag{8}$$

で定義する．この S_δ が条件 (6) と (7) を満たすことは容易に確かめられる．さらに，S_δ は関数に付随した超関数でないこともわかる．その検証は読者に委ねよう．実は，この S_δ が超関数論における Dirac の δ である．このことは以下の節で明らかになるだろう．

2.2 シュワルツ超関数の局所性

T を $\mathbb{R}$ 上のシュワルツ超関数とする．このとき，T

---

*1)　粗く言えば，$\varphi(x)$ の値が零とならない点の集合である．ただし，その集合の境界も含めるのである．

*2)　開区間 $I = (a, b)$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ の部分集合 K が I でコンパクトであるとは，K は閉集合で $a < a' < b' < b$ なる a' と b' が存在して $K \subset [a', b'] \subsetneq I$ となることである．肝要な点は，K が I の端点 a と b から離れていることである．この概念に不慣れな読者は，この点に注意して読み進めると良い．

*3)　つまり，入力 $\varphi \in \mathscr{D}(I)$ に対し実数 $T(\varphi)$ を出力する対応関係のこと．

*4)　このような T を数学では $\mathscr{D}(I)$ 上の**連続線形汎関数**という．また，このような連続線形汎関数のなす集合を $\mathscr{D}(I)$ の**強双対空間**という．

の各点 $x \in \mathbb{R}$ での値を超関数の定義から求めることはできない．従って，各点での値という概念はもはや意味をなさないことになる．しかし，このままでは T を関数のように扱うことができず，はなはだ不自由である．例えば，“ある開区間 J で T は 0 か” というような問いにさえ答えることができない．関数 $f(x)$ の点 x での値とは，“$f(x)$ を点 x に制限したもの” と言い換えることができる．一点上の関数はその値と同一視できるからである．超関数の場合，一点への制限はできないが，以下に見るように，開集合への制限はできるのである．制限を使うことで，例えば，“T が開区間 J で 0 である” ということを，“T を J に制限することで得られる J 上の超関数が 0 になる” と定義できる．このように，開集合への制限は，考える範囲を局所化するための重要な手段なのである．

さて，$\mathscr{D}_b(I)$ の定義にもどって考えてみよう．我々は入力として I のコンパクト集合を台に持つ無限回微分可能関数の集合 $\mathscr{D}(I)$ を選んだ．ここで，台がコンパクトである必然性を疑問に思った読者も多いのではなかろうか．実は，このコンパクトな台を持つという条件が，超関数の制限を定義するために必要なのである．

J を I に含まれる開区間とする．$\varphi \in \mathscr{D}(J)$ は，その台がコンパクトであるから J の端点の近傍で 0 である．従って，$\varphi(x) = 0\ (x \in I \setminus J)$ と定義することで，φ を $\mathscr{D}(I)$ に属する I 上の関数と見做すことができる．これを φ の I への**標準延長**と呼び $\tilde{\varphi}$ と書くことにする．φ の台が J でコンパクトでないとき，その標準延長は一般に存在しないことに注意する．T を I 上の超関数とする．このとき，

$$T|_J(\varphi) := T(\tilde{\varphi}) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(J)) \tag{9}$$

と定めることで J 上の超関数 $T|_J$ が定義できる．この $T|_J$ を**超関数 T の J への制限**とする．もし，T が I 上の関数 f に付随した超関数 T_f であるならば，

$$T_f|_J(\varphi) = \int_I \tilde{\varphi}(x) f(x) dx = \int_J \varphi(x) f|_J(x) dx$$
$$= T_{f|_J}(\varphi) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(J))$$

が成り立つから，この場合，超関数としての制限と関数としての制限は一致する．

超関数の制限を用いることで，**超関数 $T \in \mathscr{D}_b(I)$ の台集合** $\operatorname{supp} T \subset I$ を定義することができる．I の開集合 U で $T|_U = 0$ となるような最大のものをとる．このような U は，そこで T が 0 となるような開集合の合併で与えられる．このとき，$\operatorname{supp} T := I \setminus U$ と定義する．I 上の関数 f に対し $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} T_f$ が成り立つ．従って，この定義は，関数の場合のそれの自然な拡張である．

例として，(8) で定義された $S_\delta \in \mathscr{D}_b(\mathbb{R})$ の台集合を求めてみよう．$U := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とおく．$\varphi \in \mathscr{D}(U)$ の $\mathbb{R}$ への標準延長 $\tilde{\varphi}$ は $\tilde{\varphi}(0) = 0$ を満たす．従って，$\varphi \in \mathscr{D}(U)$ に対し $S_\delta|_U(\varphi) = S_\delta(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(0) = 0$ となり $S_\delta|_U = 0$ である．つまり $\operatorname{supp} S_\delta \subset \{0\}$ を得る．一方，明らかに $S_\delta \neq 0$ であるから $\operatorname{supp} S_\delta = \{0\}$ である．このことから，S_δ は Dirac の δ の最初の条件 $\delta(x) = 0\ (x \neq 0)$ を満たしていることがわかる．

2.3 シュワルツ超関数の微分と積分

シュワルツ超関数の微分を定義しよう．まず，f を I 上の C^1 級関数とする．$\varphi \in \mathscr{D}(I)$ が I の端点の近傍では 0 であることに注意して部分積分を用いると

$$T_{f'}(\varphi) = \int_I f'(x)\varphi(x) dx$$
$$= -\int_I f(x)\varphi'(x) dx = T_f(-\varphi')$$

を得る．つまり，f の微分 f' に付随する超関数 $T_{f'}$ は，入力 φ に出力 $T_f(-\varphi')$ を対応させる超関数に等しい．このことから，超関数の微分を次で定義すると，通常の関数の場合は，超関数の意味での微分と古典的な微分が一致することになる．

定義 3 $T \in \mathscr{D}_b(I)$ に対し，その微分 $\dfrac{dT}{dx}$ を

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) := T(-\varphi') \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(I)) \tag{10}$$

で定義する．

$\varphi_k \to 0$ in $\mathscr{D}(I)$ $(k \to \infty)$ のとき，$-\varphi_k' \to 0$ in $\mathscr{D}(I)$ が従うので，入力 φ に出力 $T(-\varphi')$ を対応させる関係は I 上の超関数となることに注意する．また，定義から任意の超関数は（超関数の意味で）常に微分可能であることが従う．これは，超関数を導入する最大のメリットである．例として Heaviside 関数 $Y(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の超関数と見做し，その微分を求めてみよう．

$$\frac{dT_Y}{dx}(\varphi) = T_Y(-\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} Y(x)\varphi'(x) dx$$
$$= -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = S_\delta(\varphi).$$

最後の S_δ は，(8) で定義された超関数である．よって，$Y(x)$ の微分は S_δ となる．

次に超関数の積分を定義しよう．$T \in \mathscr{D}_b(I)$ はその台集合が I でコンパクトとする．

定義 4　T の I での積分を

$$\int_I T dx := T(\psi) \tag{11}$$

で定義する．ここで，ψ は T の台の近傍で恒等的に 1 となる I 上の試験関数とする．

この定義は ψ の選択に依存しないことに注意する．ψ_1 と ψ_2 を T の台の近傍で恒等的に 1 となる I 上の試験関数とする．$\mathrm{supp}(\psi_1-\psi_2)\cap \mathrm{supp}\, T=\emptyset$ が成り立つので $T(\psi_1-\psi_2)=0$ を得る．つまり $T(\psi_1)=T(\psi_2)$ であり，積分は ψ の選び方に依存しないことがわかる．また，f を I 上の連続関数でその台集合が I のコンパクト集合となるものとすると，

$$\int_I f(x)dx = \int_I T_f dx$$

が成り立つ（読者自ら確かめよ）．従って，超関数の意味での積分は，通常の関数の積分の自然な拡張となっている．

例として超関数 S_δ の $\mathbb{R}$ 上の積分値を計算してみよう．

$$\int_{\mathbb{R}} S_\delta dx = S_\delta(\psi) = \psi(0) = 1.$$

以上から超関数 S_δ は Dirac の δ の条件をすべて満たしていることがわかる．また，Heaviside 関数 $Y(x)$ の微分となっていることは既に見た．従って，シュワルツ超関数の枠組みで Dirac の δ とそれに付随する公式が正当化された．

3. 佐藤超関数

シュワルツ超関数は観測を通して間接的に対象を定義する．佐藤幹夫は正則関数を用いることで超関数を直接的に構成することに成功した．佐藤の定義した超関数は佐藤超関数と呼ばれ，シュワルツ超関数を含むより広いものである．

3.1 佐藤超関数のアイデア

複素平面 $\mathbb{C}$ の座標を $z=x+iy$ とする．また，$\mathbb{C}$ の開集合 U に対し，$\mathcal{O}(U)$ で U 上の正則関数全体を表すこととする．

佐藤超関数の基本的なアイデアは，正則関数の実軸での境界値の差を考えることで関数概念を拡張しようというものである．このアイデアを理解するために，最初に，実軸への極限が実際に存在するような正則関数のクラスを導入する．I を $\mathbb{R}$ の開区間，V を $\mathbb{C}$ の開集合で $V\cap\mathbb{R}=I$ となるようなものとする．初めての読者は $I=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{C}$ として読み進めてかまわない．

集合 $V\setminus I$ は上半平面部 $H_+=V\cap\{y>0\}$ と下半平面部 $H_-=V\cap\{y<0\}$ からなること，及び，I は集合 H_+ と H_- の実軸での境界をなしていることに注意しておこう．$f\in\mathcal{O}(V\setminus I)$ を，任意の $n=0,1,\ldots$ に対し，H_+ に制限した $f^{(n)}|_{H_+}$ と H_- に制限した $f^{(n)}|_{H_-}$ がそれぞれ $H_+\cup I$ と $H_-\cup I$ に連続関数として延長できるようなものとする．以下，このような正則関数のなす集合を $\mathcal{O}^w(V\setminus I)$ で表す．このとき，任意の $x\in I$ に対し，実軸への極限 $\lim_{\epsilon\to 0+0} f(x+i\epsilon)$ と $\lim_{\epsilon\to 0+0} f(x-i\epsilon)$ が存在し，それら極限は I 上の C^∞ 級関数となる．従って，**境界値写像** $b:\mathcal{O}^w(V\setminus I)\to C^\infty(I)$ を

$$b(f)(x) := \lim_{\epsilon\to 0+0} f(x+i\epsilon) - \lim_{\epsilon\to 0+0} f(x-i\epsilon)$$

で定義できる．複素関数論で有名な Mittag-Leffler の定理を用いると次の事実が証明できる．

補題 2　境界値写像 b は全射である．特に，I のコンパクト集合に台を持つ C^∞ 級関数 $g(x)$ に対し正則関数

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{g(t)}{t-z}dt \in \mathcal{O}^w(V\setminus I) \tag{12}$$

が $g=b(f)$ を満たす．

この補題から，任意の C^∞ 級関数は $\mathcal{O}^w(V\setminus I)$ に属する正則関数の上半平面部と下半平面部からの境界値（極限）の差で与えられることがわかる．そこで，対象とする正則関数を $\mathcal{O}^w(V\setminus I)$ から $\mathcal{O}(V\setminus I)$ へ広げると，その境界値の差は新しい対象（超関数）を与えるのではないかという発想に至る．ただし，一般の正則関数はもはや実軸への極限を持たないから，それを別の表現に置き換える必要がある．

3.2 佐藤超関数の定義

$\mathcal{O}(V)$ はその元を $V\setminus I$ 上の正則関数と見做すことで $\mathcal{O}^w(V\setminus I)$ の部分ベクトル空間となる．そこで，商ベクトル空間

$$\mathscr{B}^w(I) := \mathcal{O}^w(V\setminus I)/\mathcal{O}(V) \tag{13}$$

を導入する．つまり，$\mathscr{B}^w(I)$ は，$\mathcal{O}^w(V\setminus I)$ の元たちをその差が $\mathcal{O}(V)$ に属するときに同一視することで作られる集合である．以下，$f\in\mathcal{O}^w(V\setminus I)$ に対し $[f]$ で $\mathscr{B}^w(I)$ における f の同値類を表すものとする．

さて，$f\in\mathcal{O}(V)$ に対して明らかに $b(f)=0$ が成り立つから，$[f]=[g]$ ならば $b(f)=b(g)$ である．よって，$[f]\in\mathscr{B}^w(I)$ に対し $b(f)\in C^\infty(I)$ を対応させる

写像 $\hat{b}: \mathscr{B}^w(I) \to C^\infty(I)$ が合法的に定まる．

補題 3 $\hat{b}: \mathscr{B}^w(I) \to C^\infty(I)$ はベクトル空間の同型写像であり，この 2 つのベクトル空間は同型である．

全射であることは補題 2 からの帰結である．単射であることは次のように示される．$\hat{b}([f]) = 0$ とする．写像の定義から $b(f) = 0$ が成り立ち，f は V 上の連続関数となる．従って，モレアの定理により f は V 上の正則関数となり，$[f] = 0$ を得る．

$$
\begin{array}{ccc}
 & f \in \mathcal{O}^w(V \setminus I) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
[f] \in \mathscr{B}^w(I) & \underset{\hat{b}}{\xrightarrow{\sim}} & C^\infty(I) \ni b(f).
\end{array}
$$

この補題から，$f \in \mathcal{O}^w(V \setminus I)$ に対し境界値の差をとって $C^\infty(I)$ の元 $b(f)$ を与えることと，f に対し $\mathscr{B}^w(I)$ の元 $[f]$ を与えることは，($\hat{b}$ を通して) 同じであると見做せる．つまり，“実軸における境界値の差とは $\mathscr{B}^w(I)$ の同値類のこと” と考えても良いわけである．$\mathscr{B}^w(I)$ を考える長所は，定義における $\mathcal{O}^w(V \setminus I)$ を $\mathcal{O}(V \setminus I)$ に置き換えることで，一般の正則関数に対して境界値の差（に相等するもの）を考えることが可能になる点である．

定義 5 I 上の佐藤超関数の集合を

$$\mathscr{B}(I) := \mathcal{O}(V \setminus I)/\mathcal{O}(V) \tag{14}$$

で定める．

Mittag-Leffler の定理から，この定義が V の選択に（同型を除き）よらないことがわかる．以下，$f \in \mathcal{O}(V \setminus I)$ に対し，$[f]$ で $\mathscr{B}(I)$ における f の同値類（つまり佐藤超関数）を表すこととする．

3.3 佐藤超関数に対する種々の操作と例

佐藤超関数に対して，その制限，微分，積分を定義しよう．しかし，シュワルツ超関数の場合と異なり，これらの演算を定義することは容易い．佐藤超関数は同値類 $[f]$ で与えられるので，この代表元 f に対応する演算を施こせば良いからである．

まず，制限を考えよう．$J \subset \mathbb{R}$ を I に含まれる開区間，W を $\mathbb{C}$ の開集合で $W \cap \mathbb{R} = J$ かつ $W \subset V$ となるものとする．このとき，$W \setminus J \subset V \setminus I$ が成り立つ．よって，$[f] \in \mathscr{B}(I)$ に対して，$[f]$ の J への制限を $[f|_{W \setminus J}] \in \mathscr{B}(J)$ で定義できる．

制限を用いてシュワルツ超関数の場合と同様に超関数 $[f]$ の台集合 $\mathrm{supp}[f] \subset I$ が定義できる．特に，定義から，$[f]$ が点 $x_0 \in \mathbb{R}$ の近傍で 0 であることと $f(z)$ が $z = x_0$ の近傍で正則関数となることは同値であることが容易にわかる．後者の条件をより正確に述べておくと，x_0 の近傍 $U \subset \mathbb{C}$ とそれ上の正則関数 $\tilde{f}$ が存在して $f|_{U \cap (V \setminus I)} = \tilde{f}|_{U \cap (V \setminus I)}$ となる，ということである．これを踏まえて，幾つか例を見てみよう．

例 1. $S_\delta := \left[\dfrac{-1}{2\pi i}\dfrac{1}{z}\right] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$．代表元は原点以外で正則な関数であるから $\mathrm{supp}\, S_\delta \subset \{0\}$ である．S_δ は Dirac の δ であることが後程わかる．

例 2. $f(z) := \dfrac{-1}{2\pi i}\log(-z)$ とし，$Y := [f] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ とおく[*5]．$f(z)$ は負の実軸の近傍で正則であるから $\mathrm{supp}\, Y \subset [0, +\infty)$ である．$I = (0, \infty)$, $V = \{z \in \mathbb{C};\, \mathrm{Re}\, x > 0\}$ とおく．この超関数 Y の I への制限 $Y|_I$ を計算してみよう．$f \in \mathcal{O}^w(V \setminus I)$ であるから，前節の論議により，$Y|_I$ は境界値写像の像 $b(f)$ で与えられる．$\log(-z)$ のカットが正の実軸であることに注意して計算すると $b(f) = 1$ となる．よって Y は $x > 0$ で恒等関数 1 である．$x < 0$ では $Y = 0$ であるから，この Y は Heaviside 関数を与えている[*6]．

次に微分を定義しよう．$[f] \in \mathscr{B}(I)$ に対し，その微分を $\dfrac{d[f]}{dx} := \left[\dfrac{df}{dz}\right] \in \mathscr{B}(I)$ で定める．上例の Y の微分を計算してみよう．

$$\frac{dY}{dx} = \left[\frac{df}{dz}\right] = \left[\frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right] = S_\delta.$$

従って，Y の佐藤超関数の意味での微分は S_δ である．

最後に積分を定義する．$[f] \in \mathscr{B}(I)$ とし，その台は I のコンパクト集合 K に含まれているとする．このとき，台の条件から f は $V \setminus K$ で正則となる．積分を

$$\int_I [f]dx = \int_C f(z)dz \tag{15}$$

で定義する．ここで，C は K を時計回りに 1 周する $V \setminus K$ 内の道とする．この定義が同値類の代表元の選び方によらないことは，コーシーの積分定理からただちに従う．例として S_δ の $\mathbb{R}$ 上の積分を計算してみよう．

$$\int_{\mathbb{R}} S_\delta dx = \int_C \frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{z}dz = 1.$$

ただし，C は原点を時計回りに 1 周する道とする．

以上から S_δ が Dirac の δ の条件を満たし，また，Heaviside 関数の微分になっていることが確認された．佐藤超関数の枠組みでは，シュワルツ超関数のそれに

---

*5) $\log z$ は $\log 1 = 0$ なる分枝とし，負の実軸にカットを入れるものとする．

*6) ただし $x = 0$ の近傍での論議がなされていないので，この結論は多少性急である．詳細は省く．

比べ，これらの事実を直感的かつ容易に確認できることが了解されよう．

4. 脆弱性

シュワルツ超関数は佐藤超関数と見做すことができる．例えば，コンパクトな台 $K \subset \mathbb{R}$ を持つシュワルツ超関数 $T \in \mathscr{D}_b(\mathbb{R})$ に対して，

$$f_T(z) := \frac{1}{2\pi i} T\left(\frac{\psi(x)}{x-z}\right) \tag{16}$$

(ただし $\psi(x)$ は K の近傍で恒等的に 1 となるような試験関数) とおく．このとき，$f_T(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ となり，$[f_T] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ が定まる．これが，シュワルツ超関数 T に対応する佐藤超関数である．

以下，佐藤超関数がシュワルツ超関数より真に広いことを見ていこう．このことは，関数の延長性の問題を考えると良くわかる．関数の延長性とは，ある開区間で定義された関数を $\mathbb{R}$ 全体まで延長できるかという問題である．普段あまり話題にならない問題かもしれないが，解析学においては非常に基本的かつ重要な問題である．

$I = (0, \infty)$ 上で定義された連続関数 $h(x) = 1/x$ を考えよう．$h(x)$ を連続関数として $\mathbb{R}$ まで延長することは不可能である．しかし，シュワルツ超関数として延長を許すと，これは可能である．具体的に延長を与えてみよう．$h(x)$ は原点で可積分でないから，工夫が必要である．$h(x)$ が奇関数であることに注目すると，

$$\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)(\varphi) := \lim_{\epsilon\to 0+0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \ (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}))$$

はシュワルツ超関数 $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ を定義することがわかる．明らかに $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ の I への制限は $h(x)$ と一致するから，これが求める延長である．もちろんシュワルツ超関数は佐藤超関数であるから，h の佐藤超関数での延長もこれで与えられる．しかし，佐藤超関数ではより直截な延長が作れる．正則関数 $f(z)$ を上半平面では $1/z$，下半平面では 0 なるものとする．$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ であるから，$[f] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ が定まり，$[f]$ の I への制限は $h(z)$ である．最後の事実は，I で $b(f) = 1/x$ となることからわかる．

では I 上の連続関数 $g(x) = \exp(1/x)$ の延長を考えてみよう．$g(x)$ は，x を正の方向から 0 に近づけると指数増大で発散するから，連続関数として $\mathbb{R}$ へ延長できない．さらに，$1/x$ のときとは異なり，シュワルツ超関数としても延長できないのである (理由を考えてみよ)．しかし，佐藤超関数の範疇では延長を持つ．正則関数 $\tau(z)$ で，上半平面では $\exp(1/z)$，下半平面では 0 となるものを考える．$\tau(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ であり $[\tau] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ が定まり，その I への制限は $g(x)$ となる．従ってこれが佐藤超関数での延長を与える．より一般に，任意の開区間上の佐藤超関数を $\mathbb{R}$ 上の佐藤超関数に延長できるという事実が知られている．この性質は**脆弱性**と呼ばれ，佐藤超関数が十分に広い空間であることの査証と考えられている．

さて，微分方程式 $\left(x^2\frac{d}{dx}+1\right)u = 0$ を考えてみよう．$g(x)$ は I におけるこの微分方程式の解である．さらに，その延長である $[\tau] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ は

$$\left(x^2\frac{d}{dx}+1\right)[\tau] = \left[\left(z^2\frac{d}{dz}+1\right)\tau(z)\right] = [0] = 0$$

なので $\mathbb{R}$ における佐藤超関数解となっている．特に，原点の近傍での解でもある．一方，この微分方程式の原点の近傍での解で I 上 $g(x)$ と一致するようなシュワルツ超関数は存在しない．つまり，この微分方程式の解をすべて尽すには，シュワルツ超関数では狭すぎ，佐藤超関数が必要なのである．実際，次の美しい定理が成立することが知られている．P を

$$a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)$$

なる微分作用素とする．ただし，係数は実解析関数とし $a_n(x)$ は恒等的に 0 ではないとする．

定理 1 (小松彦三郎) 最高次の係数 $a_n(x)$ は $x = 0$ で m 位の零点を持つとする．このとき，微分方程式 $Pu = 0$ は，原点の近傍で $m + n$ 個の一次独立な佐藤超関数解を持つ．

$m > n > 0$ のとき，原点の近傍での一次独立なシュワルツ超関数解の個数は，一般に $m + n$ より真に小さく，その値を簡単に求めることはできない．この定理は，佐藤超関数まで範囲を広げると，代数学の基本定理に相等する定理が常微分方程式にも成り立つことを示している．佐藤超関数が最も自然な拡張であることを了解できるであろう．

最後に読者に次のことを注意しておかなければならない．超関数は微分が自由にでき大変便利である．しかし，実は，超関数同士の積を自由に行うことができないのである．これは，例えば非線形方程式を考える上で障害となる．便利さとひきかえに大きな代償もあるのだということを述べ，この稿を終わりとする．

(ほんだ・なおふみ，北海道大学大学院理学研究院)

ハミルトン・ヤコビ方程式と粘性解

三竹　大寿

1. はじめに

微分方程式は物理法則を記述するための基礎方程式として生まれ，現在では多岐の分野にわたり重要な役割を担っている．重要な微分方程式はその由来から特別な名前がついていることが多く，本稿では **Hamilton–Jacobi（HJ）方程式**という偏微分方程式について解説する．この方程式が自然の法則性を表現する上で，どのように役に立っているかを概観していく．

HJ 方程式とは，次の形をした**1 階偏微分方程式**

$$\partial_t u(x,t) + H(x, \nabla_x u(x,t)) = 0 \qquad (1)$$

のことをいう．ここで $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ時間，空間変数を表す．また，$u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は未知関数で，$H(x,p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は与えられた関数であり，以下ではハミルトニアンという．さらに，$\partial_t u$ は t 変数に関する偏微分，$\nabla_x u$ は x 変数に関する勾配，すなわち，$\nabla_x u = (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$ である．ハミルトニアン H は考える現象によってその形が決定される．具体的にどのようなハミルトニアンが重要であるか，以下の節で見ていく．一般に，ハミルトニアンに線形性を仮定しないため，(1) は**非線形偏微分方程式**になる．特に，最高階微分（HJ 方程式の場合は 1 階微分）の項に関して一切の線形性を課さないため，**完全非線形偏微分方程式**というクラスに分類される．

以下では，本稿の概要を述べるとともに，HJ 方程式がどのような分野に現れ，数学の理論にどのような影響を及ぼしたかについて簡単に見ていく．HJ 方程式の起源は古く，19 世紀中頃における Hamilton, Jacobi を中心とした，解析力学，幾何光学の研究に遡る．そこでは，ハミルトン力学系の解析手段である正準変換の母関数がみたすべき偏微分方程式として HJ 方程式が導かれている．このことについて，2 節で概観する．20 世紀中頃に Bellman は最適制御問題の観点から HJ 方程式の重要性を見抜いた．3 節で見るように，パラメータに依存するコスト関数の（そのパラメータによる）最小関数が動的計画法の原理をみたすことを見出し，最小関数がみたすべき方程式として HJ 方程式を導いた．4 節では，曲面がある法則に従って時々刻々と変化する現象を考える．この現象が微分方程式の問題として定式化されることを説明し，その一例として HJ 方程式を導く．このように，HJ 方程式は解析力学・幾何光学・最適制御等の諸分野における基礎方程式として知られている．さらに，応用分野として微分ゲーム，数理ファイナンス，材料工学，結晶成長学や画像処理などが挙げられる．

上記の分野において現れる HJ 方程式は非線形性が強く，滑らかな解の存在が期待できない．そのため古典的な意味での微分方程式の解[*1)]の範疇では体系的に HJ 方程式を解析することは難しい．そこで古典解を拡張した解の概念が必要となり，**粘性解理論**は生まれた．同理論は 1980 年代前半に Crandall, Lions の共同研究[1)]により導入された，1 階偏微分方程式の**弱解**[*2)]に対する理論である．これにより，HJ 方程式のような非線形性の強い方程式の解の大域的性質を調べることが可能になった．方程式の形から，超関数的な弱解の利用が難しいことに注意する．その後の同理論の発展により，粘性解は 2 階の退化楕円型，放物型の完全非線形偏微分方程式に対する有効な弱解の一つであること

*1)　通常の解，すなわち，$u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ であり，(1) をみたす．特に強調する場合に，古典解という．

*2)　微分方程式の解の概念を一般化して（弱めて），微分できない関数をも微分方程式の解とみなす考え方がある．一般化された解のことを弱解という．

が明らかにされた[2]．5 節では，(1) に対する粘性解の定義およびその特徴について概説する．6 節では，弱 KAM 理論について簡単に触れ，最後に 7 節で，(1) の初期値問題の粘性解の漸近挙動に関する結果を紹介する．

2. ハミルトン・ヤコビの方法

この節では，滑らかな関数 $H(x,p):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対して，常微分方程式系

$$\begin{cases}\dot\gamma(t)=\nabla_p H(\gamma(t),p(t)),\\ \dot p(t)=-\nabla_x H(\gamma(t),p(t))\end{cases}\tag{H}$$

を考える．ここで $\dot\gamma$ は γ の t 微分を表す．(H) を**ハミルトンの正準方程式系**，略して**ハミルトン系**という．これは，ニュートン力学における運動方程式を，より数学的に洗練した形で定式化したものであり，天体力学を初め多くの分野に関連し研究されてきた．

ここでは，(H) について変数変換を行うことで，問題の簡略化に努めたい．次のような状況を想定してみよう．

(A) 各 $P\in\mathbb{R}^n$ に対し，ある実数 $\overline{H}(P)$ が存在して，定常 HJ 方程式

$$H(x,P+\nabla_x v(x,P))=\overline{H}(P),\ x\in\mathbb{R}^n \tag{2}$$

は滑らかな解 $v(\cdot,P)$ をもつとする．また，$P\mapsto\overline{H}(P)$ も滑らかな関数と仮定する．

(B) 関係式 $X=x+\nabla_P v(x,P), p=P+\nabla_x v(x,P)$ を考えて，X と P が x と p の滑らかな関数で表されると仮定する．写像 $(p,x)\to(P,X)$ を**正準変換**という．

このような “理想的状況” では，(H) を解くことは，

$$\begin{cases}\dot X(t)=\nabla_P\overline{H}(P(t)),\\ \dot P(t)=0\end{cases}\tag{H'}$$

というシンプルな力学系を解くことに帰着される．以上の事実に基づいて，(2) を解くことを通して (H) を解く方法を**ハミルトン・ヤコビの方法**という．

ここで，次のことを強調する．一般的には，方程式 (2) は滑らかな解をもたないし，もったとしてもそれを用いて正準変換が構成できるとは限らない．つまり，非常に特別なハミルトニアンを除いて，(A), (B) は一般に実現しない．それゆえに，ハミルトン系 (H) の時間大域的な解析は大変難しく，長い歴史をもち，今もなお研究されている．

ハミルトン・ヤコビの方法で解ける系は，**可積分系**と呼ばれるクラスに入る．可積分系の相空間は n 次元不変多様体（これがコンパクトならば n 次元トーラスに同相）の族になる．一般のハミルトン系に対し，不変トーラスに代表される相空間の構造を調べることは力学系理論における中心的課題である．この課題に最初に本質的な進展をもたらしたのが，可積分系の摂動問題に関する Kolmogorov, Arnold, Moser の理論であり，摂動が小さい限り測度的に多数の n 次元不変トーラスが存在することを主張する．この理論は，彼らに因んで **KAM 理論**と呼ばれ，1950 年代に遡る[3]．

摂動論としての KAM 理論の限界を超える理論として，1990 年代後半に Fathi は**弱 KAM 理論**を展開した．弱 KAM 理論は，次の重要な事実に基づく．

定理 1. ある P に対して (2) は滑らかな解をもつとする．このとき，$\mathrm{Graph}\,(P+\nabla_x v(\cdot,P)):=\{(x,P+\nabla_x v(x,P))\mid x\in\mathbb{R}^n\}$ はハミルトニアンの流れに対し不変である[*3]．

定理 1 では，相空間の構造に注目し，力学系の性質を幾何学的に捉えている．6 節で見るように，弱 KAM 理論は，(2) の滑らかな解の存在を仮定しないで，定理 1 を一般化する．

3. 最適制御問題

この節では，最適制御理論の観点から HJ 方程式について解説する．まず，区間 $(0,t)$ において，状態を表す関数 γ が，制御関数 α を含む常微分方程式系

$$\begin{cases}\dot\gamma^\alpha(s)=g(\gamma^\alpha(s),\alpha(s)),\quad s\in(0,t),\\ \gamma^\alpha(0)=x\in\mathbb{R}^n\end{cases}\tag{3}$$

によって支配される状況を考える．ここで，$g:\mathbb{R}^n\times A\to\mathbb{R}^n$ と $A\subset\mathbb{R}^n$ は与えられたベクトル値関数と集合で，特に A を**コントロール集合**という．さらに，与えられた関数 $f:\mathbb{R}^n\times A\to\mathbb{R}, u_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対して，

$$J[\alpha](x,t):=\int_0^t f(\gamma^\alpha(s),\alpha(s))\,ds+u_0(\gamma^\alpha(t))$$

と置く．このような状況で，$J[\alpha](x,t)$ を α に関して最小化する問題を考えよう．このような問題を**最適制**

---

*3） 各 t に対し $\varphi_t^H:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\varphi_t^H(x,p):=(\gamma(t),p(t))$, ただし $(\gamma(t),p(t))$ は初期値 (x,p) なる (H) の解とする．このとき，ハミルトニアンの流れ $\{\varphi_t^H\}_{t\in\mathbb{R}}$ は

$$\varphi_t^H(\mathrm{Graph}\,(P+\nabla_x v))\subset\mathrm{Graph}\,(P+\nabla_x v)$$

をみたす．

御問題という．

興味の対象である $J[\alpha](x,t)$ の下限を，

$$u(x,t) := \inf\{J[\alpha](x,t) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \tag{4}$$

と置く．ここで，$\mathcal{A} := \{\alpha : [0,t] \to A \mid \alpha$は可測関数$\}$ である．式 (3)，関数 $J[\cdot]$，u を，それぞれ**状態方程式**，**コスト（汎）関数**，**値**（あたい）**関数**という．また，下限をみたす α^* が存在したとき，α^* を**最適制御**という．問題として，

1. どのように関数 u が特徴付けできるか？
2. 最適制御はどのように見つけられるか？

ということを考える．

そこでまず，(4) で定義された関数 u が次の関係式をみたすことに注目する．

命題 1. 位置 $x \in \mathbb{R}^n$，時刻 $t > 0$ に対して，関係式

$$u(x,t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^h f(\gamma^\alpha(s), \alpha(s))\,ds + u(\gamma^\alpha(h), t-h) \right\}$$

が，任意の $h \in [0,t]$ で成立する．

命題 1 は直接的な計算から確かめられる．この関係式は，Bellman の最適性の原理を主張している．このとき，u は**動的計画法**をみたすという．動的計画法は，1950 年頃に Bellman により発展した理論・手法であり，最適制御問題を体系的に取り扱うことを可能にした．

命題 1 から，次のことが分かる．

定理 2. 関数 u を (4) で定義し，$\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ 上で C^1 級であると仮定したとき，u は初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u + \sup_{a \in A}\{-\nabla_x u \cdot g(x,a) - f(x,a)\} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \end{cases} \tag{5}$$

の解である．

このように導かれた方程式を**最適性方程式**という．HJ 方程式の形をしているため，特に **Hamilon–Jacobi–Bellman 方程式**（**HJB**）という．HJB 方程式の解が求まれば，**フィードバック制御**を考えることで最適制御を求めることができる[4]．

一つ簡単な例を考えよう．上の一般論において，$n = 1$，$A := \{-1, 0, 1\}$，$g(x,a) := a$，$f(x) := \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - 2n|$，$u_0(x) = 0$ とする．このとき，状態方程式と値関数はそれぞれ，

$$\begin{cases} \dot{\gamma^\alpha}(s) = \alpha(s), & s \in (0,t), \\ \gamma^\alpha(0) = x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{6}$$

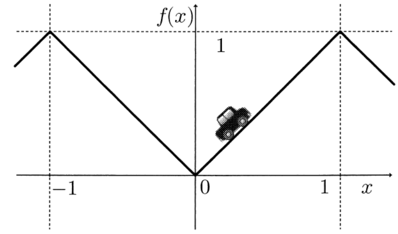


図 1

$$u(x,t) = \inf\left\{ \int_0^t f(\gamma^\alpha(s))\,ds \mid \alpha \in \mathcal{A} \right\} \tag{7}$$

となる．

この問題は次のようにたとえられる．図 1[*4)] のように周期的な坂道を通り，時刻 0 で場所 x から出発し，時刻 t まで自由に運動する．ただし，移動手段は例えば車で，その車は速さ 1 で前進するか，速さ 1 で後退するか，止まることしかできないと想定する．さらに，高さ h の地点では，消費する燃料は $h\,ds$ と想定する．

このとき，コスト関数は，α という速度のコントロールのもとでかかる燃料の総量となる．興味の対象は最小総燃料である．それが HJB 方程式の初期値問題

$$\partial_t u + \left|\partial_x u\right| - f(x) = 0,\, u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}, t > 0$$

を解くことで求められる．この例では，(5) は，$\max_{a \in A} \{-ap - f(x)\} = |p| - f(x)$ と計算できる．

4. 曲面の発展方程式

この節では，時々刻々と変形する曲面 $\Gamma(t)$ の運動を考える．物質の 2 相を隔てる界面が良い例である．ここでは，$\Gamma(t)$ が次の関係式

$$V = -h(x) \tag{8}$$

に従って変形する状況を考える．簡単のため，

$$\Gamma(t) = \{(x, u(x,t)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \tag{9}$$

と実数値関数 u によりグラフで表される場合を考える．図 2 はそのイメージ図である．(8) で，V は曲面の各点における法線方向への成長速度を表し，特に x_{n+1} 軸を正の方向とする．関数 h は考える現象により決まる．t が増大していくときの，曲面の挙動が興味の対象である．具体的には，火の燃え広がり方や結晶成長を表現できる．これは幾何学の問題とも思えるが，次のように，微分方程式の問題として捉えることができる．

*4) 図は GeoGebra を使用して描きました．使用方法について教えて頂いた同僚の濱田龍義さんに感謝致します．

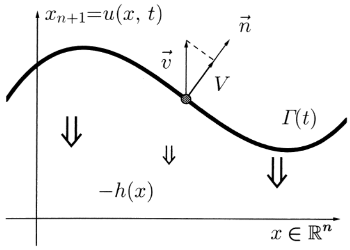


図 2

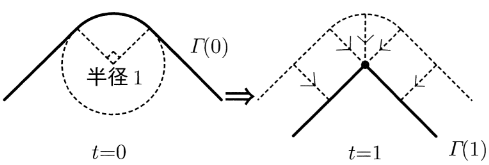


図 3

この状況において，成長速度 $V=\vec{v}\cdot\vec{n}$ は，

$$V=\begin{pmatrix}0\\ \partial_t u\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_x u|^2}}\begin{pmatrix}-\nabla_x u\\ 1\end{pmatrix}=\frac{\partial_t u}{\sqrt{1+|\nabla_x u|^2}}$$

と計算できる．これを (8) に代入すると，微分方程式

$$\partial_t u+h(x)\sqrt{1+|\nabla_x u|^2}=0,\ x\in\mathbb{R}^n, t>0 \quad (10)$$

を得る．これは HJ 方程式の一例である．この方程式の初期値問題の解を使い，関係式 (9) を通じて $\Gamma(t)$ の挙動を追う．この考え方によって，他にも多くの曲面の運動を微分方程式によって解析できる[5]．

ところで，$n=1$, $h(x)=1$ とし図 3，左図のような初期曲線を考えよう．このとき，時刻 $t=1$ では，図 3，右図の曲線となることが予想される．図 3，右図において黒丸の部分に曲線の角ができる．これを**特異点**という．u がこのような角（微分のできない点）をもつとき，どのように微分方程式の解として見なせばよいだろうか？ この疑問に次の節で答える．

5. 粘性解理論

3 節で考えた例では，直感的に最適制御が分かり値関数が求まる．まず，これについて考えよう．周期性より $-1\le x\le 1$ について考えれば十分である．2 つの場合に分けて考える：(i) $|x|\ge t$, (ii) $|x|<t$.

(i): 燃料をできるだけ使わないようにするため，速さ 1 で下ることが最適である．すなわち，$s\in[0,t]$ に対し，$\alpha^*(s)=1$ または -1*5) と選ぶ．このように制御をとり計算すると，$u(x,t)=(t/2)(2|x|-t)$ を得る．

(ii): (i) と同様に速さ 1 で下ればよいが，谷底に着いてから時間が余る．谷底に止まっていれば燃料の消費はないため，そこに時刻 t までとどまっていることが最適である．すなわち，$s\in[0,|x|]$ に対し，$\alpha^*(s)=1$ または -1 とし，$s\in[t-|x|,t]$ に対し，$\alpha^*(s)=0$ と選ぶ．このように制御をとり計算すると，$u(x,t)=x^2/2$ を得る．

以上の考察から，時間が十分経つと，$u(x,t)=\min_{n\in\mathbb{Z}}(1/2)(x-2n)^2$ となる．この関数も，$x=2n+1$ $(n\in\mathbb{Z})$ で角をもつ．

このように，(8) の法則に従う曲面や最適制御の値関数 (4) は一般に時間大域的に滑らかであることは期待できない．これは (5) や (10) の滑らかな解，すなわち古典解の存在を期待できないことに対応する．そこで，滑らかでない関数も何らかの意味で微分方程式の解とみなすほうが合理的であると考えられる．そこで，粘性解という概念を導入しよう．

さっそく，粘性解の定義を与えよう．

定義 1. 関数 $u\in C(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ が (1) の**粘性劣解**（または，**粘性優解**）であるとは，次が成立することである：$(u-\varphi)(\hat{x},\hat{t})=0$ が成り立つような任意の $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ と $(\hat{x},\hat{t})\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ に対し，もし $u-\varphi$ がすべての (x,t) に対して，

$$(u-\varphi)(x,t)\le 0\ （または，(u-\varphi)(x,t)\ge 0）$$

をみたすならば，

$$\partial_t\varphi(\hat{x},\hat{t})+H(\hat{x},\nabla_x\varphi(\hat{x},\hat{t}))\le 0. \quad (11)$$

$$（または，\partial_t\varphi(\hat{x},\hat{t})+H(\hat{x},\nabla_x\varphi(\hat{x},\hat{t}))\ge 0.）$$

ここで，φ をテスト関数という．u が (1) の粘性劣解かつ粘性優解のとき，u は (1) の**粘性解**という．

注意 1. 粘性解の語源は，流体力学における近似解法の一つである粘性消滅法に由来する．これはあとに述べる安定性の一つの結果である．もし，u が (1) の古典解ならば，u は (1) の粘性解である（**弱解の整合性**）．これは，$u,\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ に対し，$u-\varphi$ が $(\hat{x},\hat{t})$ で最大値または最小値をとったとき，$\partial_t u(\hat{x},\hat{t})=\partial_t\varphi(\hat{x},\hat{t}), \nabla_x u(\hat{x},\hat{t})=\nabla_x\varphi(\hat{x},\hat{t})$ をみたすことから明らかである．粘性解の解クラスは連続関数であり必ずしも微分可能でない*6)．また，粘性解

*5) x の符号に依存する．

*6) 問題に応じて不連続な関数を微分方程式の解としたほうが良い場合があり，様々な一般化された粘性解の概念がある．

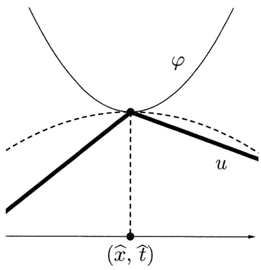


図 4

であるかどうかは古典解と同様に，各点において確かめられる．

注意 2. 図 4 のようなグラフをもつ関数 u を考え，特に点 $(\hat{x},\hat{t})$ に注目しよう．このとき，u に $(\hat{x},\hat{t})$ で上から接するテスト関数 φ はたくさんある．u が $(\hat{x},\hat{t})$ で粘性劣解であるとは，これらすべての φ に対して不等式 (11) をみたすという“強い”要求をする．一方で，この点では下から接するようなテスト関数は存在しない．この場合，確かめるまでもなく $(\hat{x},\hat{t})$ で粘性優解である．つまり“弱い”要求である．この強い要求と弱い要求の絶妙なバランスにより，広い範疇の微分方程式に対して粘性解が一意的に存在する．このことは，粘性解理論以前に導入された Kružkov による HJ 方程式の半凹解と深く関係する．Kružkov が定義した弱解に比べ，粘性解は非凸型 HJ 方程式に対しても有効であることは特筆すべきである．

粘性解の特徴を挙げる．次の三点に優れている．

1．存在性，2．一意性，3．安定性．

粘性解の存在を示す方法として 3 節で述べた最適制御の値関数が粘性解となることを示す方法が挙げられる．

ここで，3 節で挙げた簡単な例で値関数が対応する HJ 方程式の粘性解となることを示そう．u を (7) で定義される関数とする．このとき，u は $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ 上連続で，$u(\cdot,0)=0$ を満たし，動的計画法

$$u(x,t)=\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\int_0^h f(\gamma^\alpha(s))\,ds+u(\gamma^\alpha(h),t-h)\right\}$$

が成り立つ．これらのことは簡単に確かめられる．次に，u が粘性劣解であることを示すために $(\hat{x},\hat{t})$ を固定し，テスト関数 φ を考える．上の関係式で，$\alpha(s)\equiv a\in A$ という制御を選び，テスト関数の選び方に注意すると，

$$\begin{aligned}\varphi(\hat{x},\hat{t})\;=\;u(\hat{x},\hat{t})&\le\int_0^h f(\gamma^\alpha(s))\,ds+u(\gamma^\alpha(h),\hat{t}-h)\\&\le\int_0^h f(\gamma^\alpha(s))\,ds+\varphi(\gamma^\alpha(h),\hat{t}-h).\end{aligned}$$

これより，両辺 $h>0$ で割り，$h\to 0$ とすれば，

$$\partial_t\varphi(\hat{x},\hat{t})-\partial_x\varphi(\hat{x},\hat{t})\cdot a-f(\hat{x})\le 0,\quad \forall a\in A.$$

よって，結論を得る．u が粘性優解であることも同様に示せるので確かめて頂きたい．

紙面の都合で具体例のみについて示したが，この議論は一般の場合にも成り立つ．例えば，次のことがいえる．3 節に現れる g,f が，ある定数 $C>0$ に対して，

$$|g(x,a)-g(y,a)|,|f(x,a)-f(y,a)|\le C|x-y|,$$

$$|g(x,a)|,|f(x,a)|\le C,\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\forall a\in A$$

をみたすとする．また，A をコンパクト集合とする．このとき，(4) で定義される値関数は，HJB 方程式 (5) の（唯一の）粘性解である．その他に粘性解の構成方法として大変強力な Perron 法があるが，余白の関係でここでは詳しく述べない．

一意性は，比較定理[*7] により示される．この比較定理の精密化は，粘性解理論の研究において重点を置かれてきた．(5) の粘性解が値関数の特徴付けとなっていることを主張するためにも重要である．最後に，粘性解の安定性とは，次を意味する：関数列 $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が関数 H に局所一様収束すると仮定する．u_n は H を H_n に変えた (1) の粘性解とし，さらに関数 u に局所一様収束すると仮定する．このとき，u は (1) の粘性解である．

粘性解理論に興味をもたれた方のために，簡単に文献を紹介する．HJ 方程式について簡潔に書かれているものとして 6), 7)，2 階方程式の詳細まで興味ある人のために 2), 8) を挙げる．

6. 弱 KAM 理論

5 節で定義した粘性解を利用して，定理 1 について再考する．まず，定理 1 では，(2) の滑らかな解の存在を仮定したが，一般的にはこれが期待できないことを述べてきた．しかし，解の概念を粘性解に拡張することで，次の存在定理が成り立つ．

定理 3. ハミルトニアン H は x 変数に関して $\mathbb{Z}^n$ 周期的[*8] とし，$|p|\to\infty$ としたとき，$x\in\mathbb{R}^n$ 上一

*7）すなわち，u,v をそれぞれ (1) の粘性劣解，粘性優解としたとき，$u(x,0)\le v(x,0)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ ならば，$u(x,t)\le v(x,t)$, $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ が成立する．

*8）任意の $x,p\in\mathbb{R}^n$ と $e_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)$ に対して，$H(x+e_i,p)=H(x,p)$ をみたす．

様に $H(x,p) \to +\infty$ をみたす（強圧的であるという）と仮定する．このとき，各 $P \in \mathbb{R}^n$ に対して，ある実数 $\overline{H}(P)$ が存在し，定常 HJ 方程式 (2) は $\mathbb{Z}^n$ 周期的な粘性解 v をもつ．また，v は Lipschitz 連続である．

上の定理で得られた (2) の粘性解 v は，Lipschitz 連続であるので，Rademacher の定理からほとんどすべての点で微分可能である．これより，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^n$ で $\nabla_x v(x,P)$ は意味をもつ．この定理は，1980 年代後半に，Lions, Papanicolaou, Varadhan らにより発表された*9)．この定理は，まず均質化理論において重要な役割を果たすことで注目された．

Fathi はこの結果を定理 1 の観点から見直し，一般に不連続となる Graph $(P + \nabla_x v(\cdot,P))$ とハミルトン力学系の関連を明らかにした．簡単に述べると，Graph $(P + \nabla_x v(\cdot,P))$ 全体は不変多様体にならないが，そのグラフのある部分集合は不変になる．（古典的）KAM 理論では扱えないハミルトン系に対しても，不変多様体の一般化としての不変集合の存在を示し，その性質を明らかにした理論が弱 KAM 理論である．

7. 長時間挙動

最後に，(1) の初期値問題の粘性解の時間が十分大きくなったときの漸近的振舞い（長時間挙動）に関する結果に触れる．弱 KAM 理論が導入されたことで，(2) の粘性解の構造に対する理解が深まった．これを機に，HJ 方程式の粘性解の長時間挙動に関する研究は飛躍的に進展した．ここでは，4 節における HJ 方程式について，その粘性解の長時間挙動の結果について述べる．

定理 4. 関数 h, u_0 を $\mathbb{Z}^n$ 周期的連続関数とし，$h > 0$ と仮定する．関数 u を $u(\cdot,0) = u_0$ を初期値にもつ，(10) の粘性解とする．このとき，$x \in \mathbb{R}^n$ 上で一様に

長時間挙動：$u(x,t) - (v(x) - ct) \to 0 \ (t \to \infty)$

が成立する．ここで，$c := \sqrt{\max_{x\in\mathbb{R}^n} h(x)^2}$，

$$v(x) := \min_{y\in 2\mathbb{Z}^n, z\in\mathbb{R}^n} \{d(x,y) + d(y,z) + u_0(z)\},$$

$$d(x,y) := \inf\left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{c^2}{h(\gamma(s))^2} - 1}\, ds \,\middle|\, t > 0, |\dot\gamma| \le 1, \gamma(t) = x, \gamma(0) = y \right\}.$$

これにより，時間が十分経ったとき，(8) に従って変化する曲面が，どのように外力 h や初期曲面に依存するかが分かる．一般に，(1) でのハミルトニアンが p 変数に関して，強凸型かつ強圧的であるとき，その初期値問題の粘性解が定理 4 にあるような長時間挙動を見せることが，近年の研究で分かってきた．形式的な漸近展開により予想できる長時間挙動を，粘性解理論を使うことで初めて厳密に議論できる．

このように，様々な分野で HJ 方程式が現れることを簡単な具体例を通して見てきた．広い範疇の HJ 方程式の粘性解を研究することによって，3 節における最適制御問題の値関数や 4 節における曲面の運動など，それぞれについて個々に考える必要がなくなる．この汎用性は，偏微分方程式の研究の魅力の一つである．HJ 方程式は非線形性が強いがために，一般にその解析をすることが困難であったが，粘性解理論の導入により，体系的な理論を構築することが可能になった．

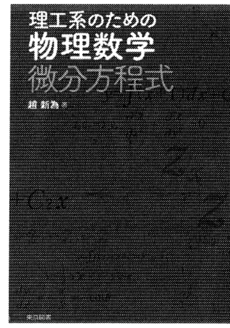
謝辞： 2，6 節に関して，早稲田大学の曽我幸平さんから有用な助言を頂き改訂しましたので，感謝致します．

参考文献

1) M.G. Crandall, P.-L. Lions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **277** (1983), no.1, 1–42.
2) M.G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **27** (1992), no.1, 1–67.
3) 伊藤秀一，『常微分方程式と解析力学』，共立出版 (1998).
4) M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser, (1997).
5) Y. Giga, *Surface Evolution Equations: A Level Set Approach*, Birkhäuser (2006).
6) G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag, (1994).
7) P. Cannarsa, C. Sinestrari, *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*, Birkhäuser, (2002).
8) W.H. Fleming, H.M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Stochastic Modelling and Applied Probability, **25**. Springer, New York, 2006.

（みたけ・ひろよし，福岡大学理学部）

*9) 残念ながらこの結果はどの雑誌にも投稿されておらず，有名な未発表論文に示されている．



理工系のための物理数学 微分方程式

趙新為著，A5 判，208 頁，本体 2200 円，東京図書

微分方程式を大学生が学ぶ最初の楽しみは何であろうか？ 微分方程式の専門分野で研究する評者も，最初に微分方程式と出会った頃のことを思い出すと，初等的な常微分方程式が解けて，解が具体的に求まるという驚きと楽しみにあったように思われる．2 次方程式や連立 1 次方程式のような簡単な代数方程式のように，微分方程式の解が求まるということを体験するところから微分方程式の世界に入り込んで抜け出せなくなった方は少なくないのではないかと推測する．解が具体的に求まるようなクラスは一部に過ぎないが，解を求めるという体験を通して微分方程式の扱いに少しずつ慣れていくと，微分方程式の形や性質に気づき始め，解や解構造の性質に関する数学理論の重要性も実感できる．

微分方程式は，数学の分野だけでなく物理や工学の広い分野で道具として必須である．それゆえに多数の常微分方程式の教科書が出版されている．一般に数学系の学生を対象としている書籍に比べ，物理や工学系で使われる教科書は，応用を意識した計算手法のほうに重きが置かれる傾向がある．

さて，今回の著書であるが，これは物理の分野や，電子・電気系などの物理と深く結びついた工学系の学生たちが学ぶテキストとして利用してもらうことを意図して書かれている．内容は，常微分方程式の入門的な「第 1 章 1 階常微分方程式」,「第 2 章 2 階常微分方程式」に加え，「第 3 章 微分演算子と連立微分方程式」と「第 4 章 級数による微分方程式の解法」が取り上げられている．

まず，全体的に受ける印象として平易にかつていねいに書かれていることがあげられる．また，最近の学生の学力，好みの傾向などを考慮していろいろな配慮がなされている．決して数学の理論的な部分には深入りせず，それでいながら理論的に重要なポイントは押さえられている．

もう少し具体的に見てみよう．第 1 章は微分方程式の意味や解の定義から始まって，初等的な解法について具体例を入れながら解説されている．具体例の解法はていねいで視覚的にも計算のスペースを十分取り読みやすい．また，任意定数の置き方や途中の計算で気になる条件などについては，簡単な注釈を入れて，形式的に扱えることを補足説明している．

第 2 章では，2 階および高階の同次・非同次線形微分方程式を取り扱っている．前半は線形性を重視した解説がなされている．線形性は，数学の体系的考え方にまだ慣れていない学生には結構高いハードルになっていることを，評者自身もその教育現場で実感しており，このような導入には共感できる．ロンスキー行列式や基本解の概念も平易に解説されている．線形微分方程式の一般解が 1 次結合の形に書き表されることを理論的に説明するのに，避けて通れない部分ではあるが，正面からこれだけ平易に解説されている点に筆者の豊富な経験とバランス感覚の良さを感じる．少し気になったのは「線形組合せ」や「線形相関」という用語である．あまり馴染みがなく，数学の分野では「線形結合」や「線形従属」のほうが自然に使われているので少し違和感を感じる．

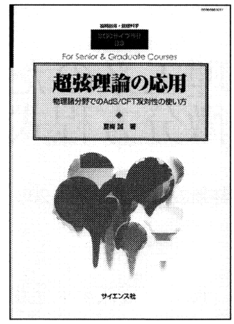
第 3 章は微分演算子の章である．微分演算子は非同次定数係数線形微分方程式を形式的な計算で解く手法で応用分野ではよく使われる．本書ではラプラス変換を持ち出さずに解法としての利便さに重点を置いている．第 4 章では級数解の話であるが，これはまえがきでも触れられているが，初歩的な紹介にとどめ，発展的な話題としてこのような方法もあるという紹介として位置付けられる．

全体的によくまとまっており，理工系のテキストとしては大変使いやすい仕上がりになっているという感想である．また，途中にエピソードも入れ，飽きさせない工夫もなされている．ページ数や価格も学生にはお手頃である．ただし，演習問題はこれだけでは十分と思えないので，授業で使う場合は別途その準備がいるかもしれない．また，使い勝手に重点が置かれており，数学系のような学生に，より深く学びたいと思わせるには，少し物足りないだろう．一方で，昨今の学生の傾向を考えると，このような常微分方程式の入門的解説は数学の専門家にも参考になる．

森田 善久（龍谷大学理工学部）

超弦理論の応用

物理諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方



夏梅誠著，B5 判，216 頁，本体 2495 円，サイエンス社

物理学の歴史を振り返ってみれば，相対論や量子論など，ときに世の中の見方を根底から覆すような革命的発見がなされてきた．本書のテーマである AdS/CFT 双対性，あるいはより一般にホログラフィック原理も，いずれそのように回顧される日が来るのかも知れない．AdS/CFT 双対性自体は 15 年ほど前から超弦理論で盛んに議論されているが，高エネルギー原子核（QCD）分野で応用されるようになったのは，ここ 10 年くらいである．あまりに革命的な手法だったので，応用分野では，初めはなかなか受け容れられない向きもあったが，今日ではすっかり市民権を獲得した感がある．著者の夏梅氏は，応用分野の黎明期に，いち早く AdS/CFT 双対性に注目して，散逸のある相対論的流体力学や相転移・(動的) 臨界現象の先駆的研究をしたことで原子核分野でも広く知られている．トークの分り易さには定評があって，何を隠そう私も以前，夏梅氏のトークスライドを一生懸命集めて，勉強させてもらったことがある．超弦理論でスゴイことができるらしい，自分もちょっとやってみたい，しかしなにせ相手は超弦理論，門外漢には敷居が高い．心が折れそうになりながらも，夏梅氏のトークを聞いたり，スライドを見ていると，あら不思議，分かったような気がしたものだ．本書にも，そんな夏梅マジックが存分に発揮されている．

前提知識をほとんど要求せずに，実践レベルの超弦理論の応用を一冊の本で解説するのは，言うまでもなく至難の業である．応用諸分野の現象論もそれぞれに奥が深く，本来，それだけで教科書になるような内容である．これらをバランス良く配することに，本書はかなり成功していると言えるだろう．理論を勉強するときには，数式をきちんと追えるだけで何となく幸せになって，ちょっと賢くなったような実感が得られたりする．こんな読者心理を巧みに衝いて，一般相対論のコンパクトな解説から粘性係数の導出，相転移の解析に至るまで，要所要所で丁寧な式変形が展開されている．その一方で，本当は必須事項だが，差し当たって深い知識の要求されないところ，例えば有限温度の場の理論の解説は，数行の注釈を除いて大胆にも切り捨てられている．また凡百の本と違って，具体的計算に入る前に必ず直感的説明やときには答えまでも先に与えており，読者が文脈で迷子にならないようにと気遣う著者の工夫が感じられる．

非専門家向けに丁寧に書かれているが，極めて高度な最先端の話題も織り交ぜられているので，一通りのことは知っている専門家が読んでも新しい発見があるだろう．ただ，教科書は重箱の隅までキッチリ咀嚼しないといけないと信じている若い生真面目な学生にとっては，少し消化不良のタネとなるかも知れない．私の指導している（勤勉で優秀な）大学院生たちを見ていると，最近の学生の傾向なのか，それとも私も嘗て通った道なのか，自分が今している勉強を早く研究へと繋げたい一方，細部までキッチリ理解できないとそこで足踏みしてしまうジレンマにとらわれているようである．本書を手に取る若い人には，より専門的な教科書や原論文にあたる入口としての活用を念頭に置いて，細部にはこだわり過ぎず，とにかく先へ先へと読み進めることをお勧めしたい．

特に注意を要するのが，AdS/CFT 対応は現段階では理論予想だ，という点である．本書では，トポロジー的に分類される配位の足し上げや，重力理論とゲージ理論の持つ大域的対称性を拠り所にして，ふと気付くと，いつの間にか AdS/CFT 双対性が当たり前のように導入されている，というスタイルで解説されている．これが正に夏梅マジックなのだが，何となく騙されたような気になる人もいるかも知れない．しかし敢えて言おう，マジックには素直に騙されるのが正しい鑑賞の仕方というものである．AdS/CFT 双対性には数学的な証明がないので，応用の実例にあたって段々と感覚を磨いて，自然な対応関係に見えてくるようにする，というのが現状ではベストな勉強法だろう．その目的にズバリ適った本書は，世界的に見ても稀有な AdS/CFT 実践本である．

福嶋　健二（慶應義塾大学理工学部）

頭の中は最強の実験室
学問の常識を揺るがした思考実験

榛葉豊著，A5 判，228 頁，本体 1500 円，化学同人



大変興味深い書物である．話題は，極めて多岐に亘っていて，著者の博学さを物語っている．著者は工学博士で科学哲学専攻という方だが，本書の内容から察すると，恐らく情報工学や人工知能などの研究者でいらっしゃるのだろう．

本書で著者が「思考実験」とよんでいるのは，通常はパラドックスとかディレンマなどの名称でよばれる推論，(ガリレオがしたような) 相手を説得するために考え出した事例，(アインシュタインがしたような) 発想の出発点となった思考，などである．

本書は，次の 4 Part からなる：

Part I　これぞ真骨頂の思考実験
Part II　哲学・世界観の思考実験
Part III　数学・論理の思考実験
Part IV　物理学・量子論の思考実験

各 Part には，5 つ前後の「実験 File」が配され，各 File の終わりには手際のよい「Conclusion」が付されている．各所に適切なイラストが挿入されていて，理解の助けとなっている．

本書の帯には「実験室も道具も専門知識もいらない」と記されているが，決して平易な書物とはいえない．評者も，読みとおすのに一週間ほどかかり，しかも 2 度目に読んでやっと意味が分かったという箇所もいくつかあった．その主な原因は，勿論，本書の内容が高度だからである．しかし，著者の言い回しでは言葉不足なのではないかと思われる箇所や，著者の誤記ではないかと思われる箇所も散見された．以下で，読者の理解を助けるために，そのような箇所をいくつか取り上げておこう．

上述したように，随所に挿入されているイラストが理解の助けになるのだが，本文中にその旨の記述がないので，気づかずに見過ごしてしまう箇所があった．やはりイラストに番号を付して，「(図…参照)」などと書いておいてほしかった．

pp.51–52：「そういった［個人的な］感じのことをクオリア（感覚質）といいます」とあり，「物理主義」「唯物論」では「心も物質の機能（脳の状態にともなって生じる何か）であって，心の世界が物質の世界と別にあるのではない，という立場をとります．その立場で困るのは，このクオリアをどう説明するかです」とある．しかし，なぜ「困る」のかの説明がないので，評者には困る理由が理解できなかった．

p.86：質問 1「この電車は B 駅止まりだと思いますか」となっている．ところが，その下の答えは，「この電車が B 駅止まりの確率はいくらですか」という質問の答えになっている．ここは，やはり，質問の仕方も確率を問うようにした方が分かりやすいと思う．

p.95：ラプラスの継起の規則が紹介され，次のようにある「$n+1$ 回目の試行で E が生起する確率は $(s+1)/(n+1)$ である．コインを投げる前には偏りがなく表・裏が 1/2 ずつの確率と考えていた場合も，この規則によれば，n も s も 1 ですから，2 回目には確率 2/3 で表が出る」．まず継起の規則が与える確率は $(s+1)/(n+2)$ であり，そうでないと 2/3 にはならない．しかも，この規則が与えるのは偏りを考慮に入れた場合の確率なのだから，「偏りがなく」の場合に当てはめるのが適切だとは思えない．また，この継起の法則の式は，単に天下り的に書き下されてしまっているが，導出のあらすじ程度は書いておいてほしかった．

p.146：「エネルギー消費をして熱を発生することなく」とあるが，これは「エネルギー消費もせず，熱を発生することもなく」の意味なのか，「エネルギー消費はするが，熱を発生することはなく」の意味なのか，判断がつかなかった．

ところで，評者にとって最も興味深かったのは，p.85 以降の「眠り姫問題の思考実験」や，p.101 以降の「モンティホール・ジレンマ」等における，確率計算の手法である．ものの見方・考え方によって，確率計算の結果は大きく変わってきてしまうのだということに気づかされた．

本書には，「マックスウェルの魔物」問題についてのチャールズ・ベネットによる決着や，「ハイゼンベルクの不確定性関係」を改訂した小澤の不等式についての記述など，最新の知見までもが取り入れられている．ぜひ読者に一読をお勧めしたい書物である．

安孫子　誠也 (聖隷クリストファー大学名誉教授)

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

曽我部 正博

1983年4月号

30年前に寄稿した「神経興奮とシングルチャネル」は，神経細胞で観察される巨視的デジタル電気信号である活動電位（神経興奮）が，どのようにして単一イオンチャネルの開閉を表す時系列デジタル信号から再構成できるのかを解説した．このテーマは二つの発展課題を内包していた．即ち，チャネル蛋白質の高次構造の決定に基づくイオンチャネル機能（イオン選択性と開閉機構）の解明と，時系列デジタル信号の解析理論の構築であった．その後，研究者の豊富な前者の課題が目覚ましい発展を遂げた．1998年に初めてKチャネル蛋白質の結晶構造が決められ，それまで謎であったKチャネルのイオン選択性（K^+ よりもイオン半径の小さな Na^+ がなぜ透過しないのか？）が原子レベルで解明された（2001）[1]．しかしチャネルの開閉機構については今なお謎である．それは，機能中の蛋白質の構造変化を原子レベルで計測する手段の開発が遅れているためだが，早晩見通しが得られるであろう．現在は全原子分子動力学シミュレーションを用いて，あれこれ想像している段階である[2]．一方，チャネル1分子の開閉を表す時系列デジタル信号の解析理論は未開拓のままである．これまでは，（隠れた）状態間の局所平衡を仮定して，開/閉-持続時間のヒストグラムを各状態の正規分布の線形結合に適合させて状態を推定し，反応系を連立線形微分方程式（遷移行列）で表現してきた．しかし実際の時系列データの多くはこの仮定を満たすわけではない．むしろ仮定を満たすデータのみを掬い上げてお茶を濁してきた．そのやり方でも，1分子挙動の単純加算和で細胞の巨視的信号を概ね説明できたからである．しかし，そのためにチャネル蛋白質がもつ奥深い性質を見逃してきたことは否めない．最近になって，特定の母集団を仮定せずに素直に時系列を解析する一種の非線形ウェーブレット解析法が提案され[3]，1分子挙動の時系列の奥に潜む統計力学的構造の謎に切り込める兆しが出てきた．こうした解析により，例えば分子振動をノイズ源とした確率共鳴構造との接点が見通され，さらに蛋白質1分子の動的構造機能連関の実験結果と結びつけば，微弱信号を省エネルギーかつ高感度に検出できる生体センサー分子の特徴を抽出することが可能となり，生体分子機械の機能と仕組みを情報統計力学の視点から捉える新しい学問地平が見えてくるであろう．



参考文献

1) Morais-Cabral JH, *et al.* (2001) *Nature*, **414:** 42–4; Zhou Y, *et al.*, *ibid*, 44–8.
2) Sawada Y, *et al.* (2012) *Channels*, **6**(4): 317–331.
3) Baba A, *et al.* (2007) *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **104**: 19297–302.

（そかべ・まさひろ，名古屋大学大学院医学系研究科）

リレー連載

数学的な感覚の探求

思考法の源を探る

第9回

トポロジー覚

第7の知覚

阿原 一志

1. トポロジー的な感覚—トポロジー覚

トポロジーは「ゴム膜の幾何学」とも呼ばれ，図形を研究する幾何学の中でも「繋がり具合」に重点を置いています[1,2].

トポロジーの発祥と言われるのが，有名な「ケーニヒスベルグの橋の問題」ですが，それは次のような問題です.

(問)　川の中に2つの浮島があり，図のように7つの橋がかけられている．この橋を1度ずつ渡りきる方法を示せ．

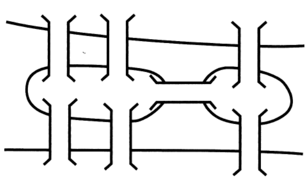


図1

オイラーはこの問題を次のように説明しました．川の両岸と2つの島を「点」で表し，橋を「点と点を結ぶ線」で表すと図2のようになります．

7つの橋を渡りきる問題は，図2を一筆で書けるかという問題と等価であることがわかります．しかし，図2の図形は奇点（奇数本の線が集まっているような点）が4箇所あり，（細かい議論は中略しますが）一筆書きにおいては始点・終点以外に奇点が起こり得ないことがわかっていますから，これを一筆で書くことはできません．（証明終）

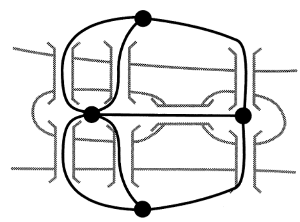


図2

実にスマートな説明です．この証明は色々な本に書かれていることなのですが，ここで私が注目したのは，ケーニヒスベルグの地図を見て，「島を点に，橋を線分として図形を書きかえてみる」というオイラーのアイディアを，おそらくほとんどの人が**何の数学的準備もなく理解できる**（だろう）ということです．

これが他の問題だったら，例えば小学生ガウスが $1+2+\cdots+100$ をたちどころに計算してしまった，という問題だったら，それでもほとんど数学的準備は必要ありませんが，$1+100=2+99=3+98=\cdots=101$ という数学的（算数的）な検算と，101 が $50(=100/2)$ 個あるという数え上げは必要です．いくら易しくできるといっても，小学校で習う算数の考察力は要求されていると思います．しかしもう一度オイラーの回答に戻って考

えてください．このような図形感覚を小学校や中学校で習ったことはないでしょう．しかし，かといって難しいことはなく，何となく理解できるのではないでしょうか．

次の例は東京圏のJRの路線図です．次の2つの図を見比べてください．

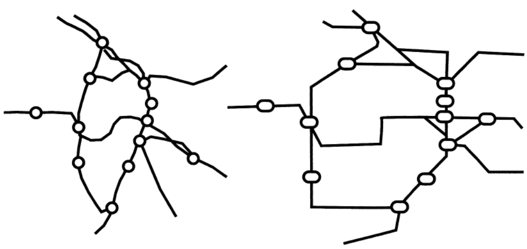


図3　関東圏のJR路線の地図．

左図は実際の地図とほとんど等しい路線図です．右図のほうは距離や方向は正確ではありませんが，駅の配置がわかりやすいようにデフォルメされた図です．東京圏のJRの駅の券売機のところには右図，もしくはもっとデフォルメされた図が書かれています．この図くらいだったら**誰でもがこの2つは同じ図形であると認識できます．**

ここでもオイラーの回答と同じ考察をすることができます．大切なことは**学校で習っているわけでもないのに誰でもがわかる**ということです．この図形的デフォルメは文系理系に関係なく，学校の成績に関係なくほぼ誰でもがわかります．しかしこれは数学的にきちんとみれば**トポロジーの問題**なのです．

ここまでデフォルメという言葉を使っていましたが，これは「図形のつながり具合は保たれたまま，連続的に変形を行うこと」であると考えることができます．このことをトポロジーではアイソトピー（同位変形）と呼びます．同位の位は位相（つながり具合）の位で，つながり具合を変えないで変形することを同位変形と呼ぶわけです．

このように考えてみると，人間の5感と直感（第6感）に加えて，「トポロジー的な図形認識能力」のことをトポロジー覚と呼ぶことにして第7の感覚として追加してもいいのではないかと思います（学術的な根拠はまるでありません）．

2. 意味がわかってしまうばっかりに，難しさもわかってしまう事例

次は，トポロジーの一分野であるところの，結び目理論から事例を拾ってみましょう[3)]．まず結び目理論とは何であるかを言わずに「三葉（みつば）結び目」と呼ばれる図形を見てもらいましょう（図4左）．

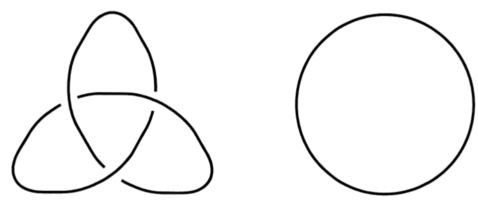


図4　三葉結び目と自明な結び目．

この絵を見て，「立体的な紐の絵であって，一回結ばれているようなワッカ状の紐」を多くの人がイメージできると思います．

次にまたもや説明はいたしませんが「自明な結び目」と呼ばれる図形を見てもらいましょう（図4右）．ワッカだけを描いているので，ワッカなのか円盤の形なのか両義的ですが，ここでは左図と同じように，「結ばれていないワッカ状の紐の絵」であると見てください．次のような「数学の定理」が知られています．

（定理A）　結び目理論の三葉結び目は自明結び目とは異なる．

結び目理論について何も説明をいたしませんが，「異なる」の意味が「紐を実際にいじくりまわして，三葉結び目からはじめて自明結び目のような状態に変形できないこと」であると説明すれば，多くの人は意味が明確にわかります．この定理の意味するところについても「きっと三葉結び目は自明結び目とは異なっているだろう」と確信することも容易です．しかし，結ばれている紐は一度切らなければほどけないだろう，という長年の図形的な直感が先立ってしまって「それがなぜか」という理由を説明することはひどく難しいと思ってしまいます．

ここでは，結び目理論の初歩で学習する 3 彩色可能性による証明を紹介したいと思います．

2.1 3 彩色とは

結び目の絵を描くときには，線の交差点（重なって見えるところ）を  のように書くわけですが，このように書かれた絵の「繋がっている線に 3 つの色を配色する」ことを考えます．最初の三葉結び目の例ですと図 5 のようにすれば（3 色の代わりに実線・点線・太線で表しました），3 色に描き分けられています．さて，この例ではそれぞれの交差点について見ると  や  のように，3 つの色が集まっているように配色されていることがわかります．

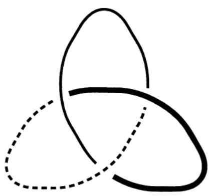


図 5　三葉結び目の 3 彩色．

そこで，今度は結び目の絵が与えられたときに，このようにすべての交差点で 3 つの色が集まるように線を塗り分けできるかどうかと言う問題を考えることができます．もう少し条件を広げて，「3 彩色問題」を次のように規定することにします．

(1)　結び目の絵の線を 3 色で描く（ただし必ず 3 色全部を使う）．

(2)　交差点では「すべて同じ色」または「すべて異なる色」が集まる．

上の絵で示したように，三葉結び目の絵（図 5）は 3 彩色できます．一方，自明な結び目の絵（図 4 右）に色をつけようとしても，1 色しかつけようがないので条件 (1) を満たさないことがわかります．

2.2 変形しても同じ結び目であるためには

定理の証明のために「同じ結び目」のためのルールを 4 つ決めておきましょう．

(0)　まず，紐の絵の交差の具合を変えないで図全体を動かすことが考えられます．例えば図 6 のようにつながり具合を変えないで形をぐしゃぐしゃにしてしまうのは実際に紐で形をつくれば日常的にありそうなことです．こういう形の変形は結び目として同じものであるとみなせます．

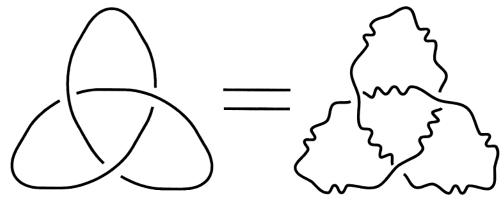
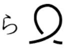
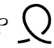


図 6　結び目の絵の同位変形．

(1)　その他にも，絵としては異なるけれども明らかに同じ結び目と思えるような絵の変形パターンがいくつかあります． から  や  にするのはどうでしょうか．例えば紐の絵の部分的な変形で図 7 のように絵が変わったとしても，これは同じ結び方であることは明らかです．

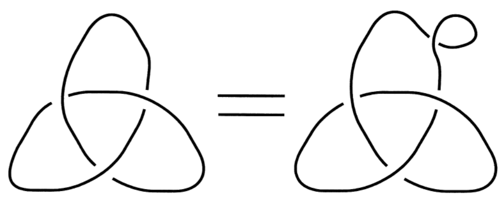


図 7　結び目の絵の変形 1.

(2)　同じように考えると 2 箇所の紐が一瞬からまって見えることがあります．つまりこういう図の変形です．図 8 のように絵を書きかえたとしても，絡まり方は同じに決まっています．

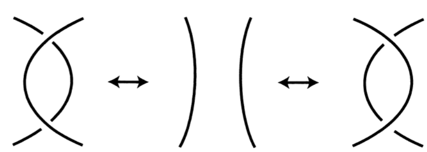


図 8　結び目の絵の変形 2.

(3)　他にはないでしょうか．紐が 3 本だいたい重なっているとき，それを少しずらしたような絵を描くと，図 9 の変形は実は結び方を変えていないことがわかります．

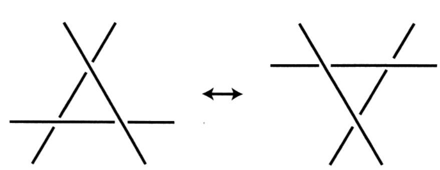


図 9　結び目の絵の変形 3.

結び目の絵があったとき，これを上の (0)(1)(2)(3) のルールで書きかえても，結び方としては同じだということは，経験的に明らかです．そこで結び目が同じということを定義しましょう．

（定義） 結び目の絵を上の (0)～(3) のルールで書きかえたものを同じ結び目であると定義する．

数学用語でいうと (0) がアイソトピー（同位変形）で (1)(2)(3) がライデマイスター移動なのですが，用語にはあまりこだわらないようにして素朴に説明することにします．

2.3 3彩色できていれば…

ここで，次の補題が成り立ちます．

（補題） ある結び目の絵を3彩色できることと，(0)～(3) のルールで書きかえた結び目の絵が3彩色できることとは必要十分である．

この補題の全証明を紹介していると，後の面白い話を削らなければいけませんので，(2) についてだけ図で説明しておくことにします．

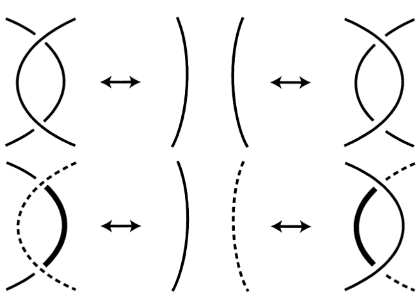


図10　結び目の絵の変形3.

この図で，(2) による書きかえの前と後とで，3彩色のルールがきちんと守られていることがわかると思います．上の絵では1色しか出てきませんが，もともと他のところで3色使われているわけですから大丈夫です．

以上の準備の下に定理Aを証明しましょう．三葉結び目は3彩色可能でした．一方で自明結び目は3彩色不可能でした．このことから，三葉結び目から (0)～(3) の書きかえで自明結び目を得ることはできません．従って異なる結び目です．

3. 高次元の壁

ポアンカレ予想は近年ペリルマンによって解決された，トポロジーの大予想ですが，定理を説明するだけでも「3次元」,「多様体」,「単連結」などの言葉が一般読者の直感を邪魔する状況です．ポアンカレ予想に関してよく聞かれるのが「ポアンカレ予想は3次元と言っていますが，球面や浮き袋は3次元図形ですよね？」という質問です．

これがそうではありません．球面や浮き袋は「面」ですから，図形としては2次元的です．曲がった面なので絵を描こうとすると3次元になってしまいますが，「面はあくまで2次元」です．このことをは「球面にへばりついて生きている生き物があるとすると，この生き物は何次元か？」を考えると「へばりついているなら2次元」であることからわかります．

ポアンカレ予想は3次元の図形（多様体）の問題ですが，「3次元の図形」を私たちは実感できるでしょうか？ NHKの番組を書籍化した本[4)]では一般向けにポアンカレ予想を説明していましたが，この点ではかなり苦労していました．そこでは「宇宙の形」という言葉が使われていて，（これは根上先生が使い始めた言葉だと理解していますが,）なかなかこれが的を得ていて，3次元トポロジーと日常感覚とを結びつけるほぼ唯一の細い道であるように思います．

つまり，3次元というのは私たちが住んでいるこの宇宙のようなもので，その全体の形が3次元の図形だというわけです．だから2次元球面が3次元空間内で曲がっている面であるように，3次元空間も高次元空間の中で曲がっていることも考えられます．

しかし，そんなことを言っても絵に描けないし，思い浮かべられないのは誰でもが同じです（数学者でできないのは筆者だけかもしれませんが)．そこで「次元を落として書く」ということを行います．頭の中の論理では3次元や4次元であっても，黒板に書くときには2次元の絵を描くわけです．そのときには論理の次元感覚と絵の次元感覚の間

を行ったり来たりしながら考えることになります．高次元と現実との間を行き来するにはかなり思考訓練が必要で，これはやはり専門家の領域かもしれません．

数学者のジョン・ミルナーは7次元の図形まで見えていた，という有名な話があります．彼の有名な論文の1つ[5]は7次元のある2つの図形が同相ではあるが微分同相ではない，という衝撃的な内容でした．

4. 7次元を感覚で視る

ミルナーの7次元の話は一般的なトポロジー覚でどこまでわかるか試してみましょう．もしわからなくてもそれほどがっかりすることはありません．この記事のテーマはトポロジー覚ですので，次元の高い話について図形感覚から少しでも意味がわかるかどうかを試してみてください．

まず，図形 M を机の上におきましょう．そうすると，図形上の各点には「机の板面からの高さ」が決まります．このようにして高さ関数 $f : M \to \mathbb{R}$ を定めることができます．球面の高さ関数を考えると，次のような性質を持つことがわかります．

(H)　山の頂点（極大点）が1箇所，お椀の底の形（極小点）が1箇所（図11左）あり，その他に接面が水平になるところ（例えば図11右）はない．

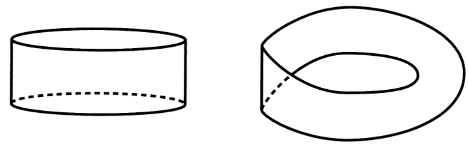


図 11

もし，図形 M が条件 (H) を満たすとすると，M はどのような形でしょうか．図11を見ても想像つきますが，条件 (H) を持つような図形 M は球面と同相（形としてのつながり具合が同じ）ということがいえます．

ここで次元を上げましょう．M が7次元の図形（多様体）であったとして，やはり上の条件 (H) を満たすならば，M は7次元球面と同相であることがいえます．このことは，2次元図形の図11を見た範囲で得られた納得感を「7次元でも同じことだ」という説明を通して7次元に持ち込めれば少し成功です．つまりこのときは7次元球面を「2次元球面のような形」と頭の中で認識しているわけです．

次はこの2つの図形を見比べてください．


図 12

左はアニュラス，右はメビウスの帯です．このどちらも「細長い帯を輪状にしたもの」ですが，全体の形状は異なります．

この2つには「全体的な形＝輪」と「部分的な形＝巾のある帯」の両方が共通しています．このような形を数学ではファイバー束（そく）と言います．ここでは全体的な形は輪＝円周 S^1 です（帯の中心線が円周であると考えることができます）．部分的な形は図13のようになっており，この縦線＝線分 D^1 の一つ一つをファイバーと言います．

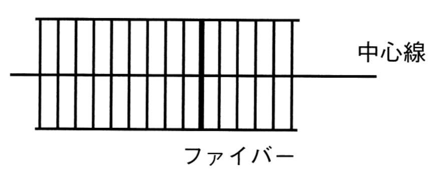


図 13

このことから図12の2つの図形は「S^1 上の D^1 束」であると言います．

M, P が図形（多様体）だとして，「M 上の P 束」がどのくらい種類があるかを決めるのはトポロジーにおいては重要な問題で，M のコホモロジー上で定義される特性類というものがその鍵を握ることが知られています[6]．特性類による分類は「滑らかさを含むような分類（微分同相）」であることが知られています．しかし，ここでは細かい定義には立ち入りません．話を進めます．

例えば，S^1 上の D^1 束の場合だと，スティー

フル＝ホィットニー特性類というものがあり，アニュラスは 0，メビウスの帯は 1 で，S^1 上のスティーフル＝ホィットニー特性類は 0 と 1 しかないことが知られているので，これで全部であることがわかります．

さて，ここから次元を上げましょう．

線分 D^1 を 2 つ用意して半円弧にして，その縁を張り合わせると円周 S^1 になります（両手の親指と人差指で円周を作る要領です）．円周 S^1 は円板 D^2 の境界線になっています（フリスビーの縁は円周です）．円板 D^2 を丸めて半球にできますので，半球を 2 つ用意してその縁を張り合わせると球面 S^2 になります（南半球と北半球をあわせると地球儀ができる要領です）．中身の詰まった 3 次元ボール B^3（例えばボーリングの球）を考えると，その境界は 2 次元球面 S^2 になっています．

ここから先は絵に描けない世界です．

中身の詰まった 3 次元ボール B^3 を（何らかの方法で丸めて）その縁を張り合わせると 3 次元球面 S^3 になります．中身の詰まった 4 次元ボール D^4 を丸めて縁を張り合わせると 4 次元球面 S^4 になります．S^3 とか S^4 とか言っていますが，とりあえずは「2 つの円板を丸めて北半球と南半球にして，その縁を張り合わせたもの（の高次元のもの）」という認識で十分です．それでは最後の詰めです．

ここで，「S^4 上の S^3 束」というものを考えます．そうするとこれは無限にたくさんの（微分同相の意味での）種類があって，その分類にはポントリャーギン特性類が用いられます．実は 7 次元球面 S^7 も「S^4 上の S^3 束」の一種なのですが，このことを頭に思い浮かべるためには四元数体の知識が必要なので，とりあえずそういうものだということで次へ進んでください．

ミルナーが論文で発見したことは，「S^4 上の S^3 束のいくつかは先ほどの条件 (H) を満たすような高さ関数 $f : M \to \mathbb{R}$ を見つけることができる」ということでした．彼はそのような f を具体的に構成したのですが，その式を見つけるには，天才的な洞察力が必要だと思います．やはりミルナーは天才なのでした．

さて，このことで何がわかったでしょうか．ポントリャーギン特性類という，滑らかさを含むような分類（微分同相）の意味では異なる図形だったのに，条件 (H) を満たすことによって，つながり具合だけは 7 次元球面 S^7 と同相であるような図形がいくつか存在することになります（ミルナーが見つけたのは 27 個でした）．

これらの図形は「エキゾチック 7 球面」と呼ばれています．大変ありがたいことに，野口先生が詳細な解説を書かれています[7)]ので興味をもたれた方はぜひ読んでみるといいと思います．

5. まとめ

トポロジー的な感覚＝トポロジー覚は多くの人が共有できている知覚であることを実証しようといくつかの例を挙げてみましたが，皆様の中のトポロジー覚がうずきませんでしょうか？ トポロジー覚は日常生活の感覚を超えて次元の縛りもはるかに越えて私たちを数学の世界へといざなってくれます．

参考文献

1) 瀬山士郎『トポロジー：柔らかい幾何学』，日本評論社，(2003)．
2) 瀬山士郎『はじめてのトポロジー』，(PHP サイエンス・ワールド新書)，(2009)．
3) 村杉邦夫『結び目理論とその応用』，日本評論社 (1993)．
4) 春日真人『NHK スペシャル　100 年の難問はなぜ解けたのか―天才数学者の光と影』，NHK 出版 (2008)．
5) J. Milnor, "On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere", *Annals of Math.*, **64**, (1956), pp.399–405.
6) J. Milnor, J. Stasheff, "Characteristic Classes", 1974, Princeton University Press.
7) 野口廣『エキゾチックな球面』，(ちくま学芸文庫)，(2010 年復刊)．

（あはら・かずし，明治大学総合数理学部）

大学院入試問題からみた

大学の数学

数学のより深い理解を目指す

第5回

線形代数3

ベクトルの内積と行列

海老原 円・太田 雅人

5.1 内積と正規直交基底

今回は線形代数の問題のうち，特にベクトルの内積が関わるものを取り上げる．

問題 5.1 （京都大学大学院情報学研究科修士課程通信情報システム専攻，平成21年度） 3次元複素線形空間内で，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ が正規直交基底を成すものとする．$\boldsymbol{e}_3$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は次のものとし，$\boldsymbol{e}_3$ の第一成分は負の実数とする．$i=\sqrt{-1}$ である．

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{24}}\begin{pmatrix} 2+3i \\ i \\ 3-i \end{pmatrix}$$

コメント 解答に入る前に，問題文についてコメントしておく．**複素線形空間**とは何か．詳しくは（一定レベル以上の）線形代数の教科書を参照していただきたいが，**加法**とよばれる演算と，複素数を「掛ける」作用（**スカラー乗法**）が定義され，しかるべき条件を満たす体系が複素線形空間である．例えば3次元複素ベクトル全体のなす集合において通常の加法とスカラー乗法とを考えたものは3次元複素線形空間の典型例であるが，もちろん，例はそれだけにとどまらない．

また，単に複素線形空間といった場合，**内積**は考慮に入れないので，**正規直交基底**という概念は存在しない．内積の定まった線形空間は，**計量線形空間**などとよばれる．例えば3次元複素ベクトル全体のなす複素線形空間において，通常の内積を考えたものは，複素計量線形空間の一例であるが，通常でない内積を与えることも可能である．

この問題に直面した受験生は，**ここで取り扱われているのが，3次元複素線形空間一般ではなくて，どうやら3次元複素ベクトル全体の集合** $\mathbb{C}^3$ **に，通常の加法と通常**

のスカラー乗法と，さらに通常の内積とを入れた特別な複素計量線形空間であるらしいと判断して問題を解くほかはあるまい．

実際問題としては，こうしたことに悩むのは，おうおうにして，線形空間についてきちんとした知識を持った優秀な受験者のみであって，多くの者は何も考えずにさっさと解答に取りかかるのかもしれない．しかし，真に優秀な学生を求めるのであれば，賢者を惑わし愚者を利するような出題は避けたいところである．

通常の内積についても一応確認しておこう．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ に対して，その内積（ここでは $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と記す）を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$$

と定める．これが通常の内積である．**標準内積**ともよばれる．ここで，複素数 $z = x + \sqrt{-1}\,y$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ に対して，$\bar{z}$ はその複素共役を表す：$\bar{z} = x - \sqrt{-1}\,y$.

解答例その 1　まず，正規直交基底の定義より直接求めてみる．ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ のどちらとも直交するとする．$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2) = 0$ より，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + iy - iz = 0, \\ (2-3i)x - iy + (3+i)z = 0 \end{cases}$$

を解いて $\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1-2i \\ 1-i \end{pmatrix}$ $(c \in \mathbb{C})$ が得られる．$\boldsymbol{e}_3$ はこのような $\boldsymbol{x}$ のうちの一つであるが，そのノルム（長さ）が 1 であることより

$$|c|^2\Big(|-1|^2 + |1-2i|^2 + |1-i|^2\Big) = 1$$

が成り立つ．また，第一成分が負の実数であることより c は正の実数であることが分かるので，$c = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となり，$\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1-2i \\ 1-i \end{pmatrix}$ が得られる．　**解答終わり**

注意　2 つの複素ベクトルの内積を計算する際に，一方のベクトルの成分の複素共役をとることを忘れてしまうと，正しい答えが導き出せない．

また，「$\boldsymbol{e}_3$ の第一成分が負の実数である」という条件は，解答を一つにしぼるために出題者が設定したものと思われるが，このような要求にミスなく応じるためには，上の連立 1 次方程式を解く段階において，方程式を $ax + y = 0,\, bx + z = 0$ $(a,\, b \in \mathbb{C})$ という形に変形するのが得策である．こうしておけば，$x = -1,\, y = a,\, z = b$ という特殊解が得られ，それらを並べたベクトルはすでにその第一成分が負の実数になっているので，あとはノルムを調整するために正の実数をかければよいことになる．

解答例その 2　次に，**グラム・シュミットの直交化法**，あるいは**シュミットの直交化法**とよばれる方法を利用して解く．これは，**正規直交系を帰納的に順次構成していく方法**である．この問題においては，すでに $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が正規直交系をなしている．いま，

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，3つのベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}$ は線形独立（1次独立）である（このことの確認は省略するが，さほど手間のかからない作業である）．さて，このとき $\boldsymbol{e}_1$ とも $\boldsymbol{e}_2$ とも直交するようなベクトル $\boldsymbol{b}$ を作り出すことができる．それには

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$$

とすればよい．これがグラム・シュミットの直交化法の骨子である．実際に計算すれば，$\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \\ -1+i \end{pmatrix}$ が得られる．これに定数をかけて，ノルムを1にし，かつ第一成分が負の実数になるようにすれば，$\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1-2i \\ 1-i \end{pmatrix}$ が得られる．

解答終わり

注意　解答例その2においては，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}$ が線形独立である限り，どのような $\boldsymbol{a}$ を選んでもよい（**クイズその1：**$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}$ が線形従属である場合にはどういうことが起きるか）．

解答者自ら計算を複雑にする必要はないので，$\boldsymbol{a}$ としては，できるだけ簡単なものを選ぶのがよい．例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のどれかを選べば，少なくとも1つの場合については $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}$ が線形独立になる（**クイズその2：**それはなぜか）．

2つの解答例を比較すると，計算の手間という意味では，実はさほど差がない．しかし，方程式を解くという作業を含むかどうかという点が決定的に異なる．**グラム・シュミットの直交化法は，構成的な方法であるところにその特質がある．**

問題5.1は原理的には比較的簡単な問題であるが，複素ベクトルの内積に慣れていないと足元をすくわれる可能性がある．

グラム・シュミットの直交化法に関する問題をもう一つ考える．

問題5.2　（筑波大学大学院博士前期課程システム情報工学研究科経営・政策科学専攻，平成21年度）　実数を係数とする n 次以下の多項式のなす線形空間 $\mathbb{R}[x]_n$ を考える．

(1)　$\mathbb{R}[x]_n$ において，

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ \cdots,\ p_n(x) = x^n$$

は基底の一つになっていることを示せ．

(2)　2つの多項式 $f, g \in \mathbb{R}[x]_1$ に対して，内積 (f, g) を

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

で定める．このとき，

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x$$

の内積 (p_0, p_1) を求めよ．
(3)　$\mathbb{R}[x]_1$ の基底の一つである

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x$$

に対して，グラム・シュミットの直交化法を適用し，$\mathbb{R}[x]_1$ の正規直交基底を求めよ．

解答例　(1) $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ が

$$c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_n p_n(x) = 0$$

を満たすとすると，$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ が零多項式となるので，その係数がすべて0となり，$c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ が得られる．よって $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ は線形独立である．

また，$\mathbb{R}[x]_n$ の任意の元 $f(x)$ をとると

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = \alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_n p_n(x)$$

$(\alpha_0\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R})$ と表されることより，$\mathbb{R}[x]_n$ は $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ によって生成される（張られる）ことが分かる．

以上のことより，$p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ が $\mathbb{R}[x]_n$ の基底であることが示される．

(2) $(p_0, p_1) = \displaystyle\int_0^1 1 \cdot x\, dx = \frac{1}{2}$ である．

(3) $\|p_0\|^2 = (p_0, p_0) = \displaystyle\int_0^1 1^2\, dx = 1$ より $\|p_0\| = 1$ である．そこで

$$e_0(x) := \frac{1}{\|p_0\|} p_0(x) = p_0(x) = 1$$

とおく．次に

$$q_1(x) := p_1(x) - (p_1, e_0)\, e_0(x) = x - \frac{1}{2}$$

とおき，そのノルムを計算すれば

$$\|q_1\|^2 = \int_0^1 \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 dx = \frac{1}{12}$$

より $\|q_1\| = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ である．そこで

$$e_1(x) := \frac{1}{\|q_1\|}\, q_1(x) = 2\sqrt{3}\Big(x - \frac{1}{2}\Big)$$

とおけば，$\|e_0\| = \|e_1\| = 1$ かつ $(e_0, e_1) = 0$ を満たす．こうして，与えられた内積に関する正規直交基底

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = 2\sqrt{3}\Big(x - \frac{1}{2}\Big)$$

が求められた．

解答終わり

関数を元とする計量線形空間は，通常のベクトルのなす計量線形空間以外の計量線形空間の重要な例を与えるので，ここで取り上げた．

5.2 直交行列・ユニタリ行列

ベクトルの内積に関連して，直交行列・ユニタリ行列に関する問題を次に取り上げる．

n は自然数とする．n 次複素正方行列 A について，次の 4 つの条件は互いに同値であることが知られている．

(a) $A\,{}^t\bar{A} = {}^t\bar{A}A = E_n$．ここで E_n は n 次単位行列を表す．

(b) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ．

(c) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つ．

(d) $A = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_n)$ とするとき，任意の i, j $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ に対して

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}), \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．

この 4 つの条件のうちのいずれか，よってすべてを満たす正方行列は**ユニタリ行列**とよばれる．また n 次実正方行列 A については，上の条件において ${}^t\bar{A}$ を ${}^tA$ に，$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に変えたものを満たすとき，**直交行列**とよばれる．

問題 5.3　(名古屋大学大学院情報科学研究科複雑系科学専攻，平成 21 年度：一部抜粋・改題)　$n \times n$ 直交行列 A と B がある．

(1)　AB が直交行列であることを示せ．

(2)　A の行列式が 1 または -1 となることを示せ．

解答例　(1) A, B が直交行列であることより，$A\,{}^tA = {}^tAA = E_n$ および $B\,{}^tB = {}^tBB = E_n$ を満たすことを用いれば

$$\begin{aligned} (AB)\,{}^t(AB) &= AB\,{}^tB\,{}^tA = AE_n\,{}^tA = A\,{}^tA = E_n, \\ {}^t(AB)(AB) &= {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBE_nB = {}^tBB = E_n \end{aligned}$$

が得られる．よって AB は直交行列である．

(2) 転置行列の行列式がもとの行列の行列式と等しいこと，および，行列の積の行列式がそれぞれの行列式の積に等しいことを用いれば

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det({}^tA) = \det(A\,{}^tA) = \det E_n = 1$$

が得られる．A が実行列であるので $\det A$ は実数であり，$\det A = 1$ または $\det A = -1$ が成り立つ．

解答終わり

実は小問 (2) のもともとの問題文は「A の行列式が 1 となることを示せ」となっていた．これは明らかな誤りであるので，上記のように改めた．実際，鏡映行列

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ は直交行列であり，その行列式は -1 である．

いろいろな大学院入試問題に目を通していると，時々間違いを見つける．ある入試問題には，直交行列が「直行行列」と書かれていた．学生の答案には時折見られる書き間違いであるが，入試問題にそれを発見するとは思わなかった．このように書かれると，何やらバーゲンセールに殺到する人の波のようなものを連想してしまう．

もう 1 題，同じところの入試問題を取り上げる．

> **問題** 5.4 （名古屋大学大学院情報科学研究科複雑系科学専攻，平成 20 年度：一部抜粋） n 行 n 列（n は 2 以上の任意の自然数）の正方行列
>
> $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
>
> は直交行列であるか否かを，理由を述べて判定せよ．

解答例　A は直交行列である．理由：A の n 個の列ベクトルは，そのノルムがすべて 1 であり，かつ，相異なる 2 個の列ベクトルが直交しているから．

解答終わり

問題 5.3 と問題 5.4 においては，いずれも直交行列の定義や性質をきちんと知っていることが求められる．

5.3 直交行列・ユニタリ行列による対角化

次に対角化の問題を考える．正則行列による行列の対角化については，すでにこの連載で論じているが，ここでは，直交行列やユニタリ行列による対角化の問題を扱う．

> **問題** 5.5 （埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程数理電子情報系専攻・数学コース，平成 21 年度）
> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．$P^{-1}AP$ が対角行列になるような 3 次の直交行列 P を一つ求め，そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ．

解答例　A の特性多項式（固有多項式）$\Phi_A(t) := \det(tA - E_3)$ を計算すると，$\Phi_A(t) = t(t-3)^2$ となるので，A の固有値は 0 と 3 である．

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおいて，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くと，一般解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ -c \end{pmatrix}$ （c は任意定数）となる．ここで $\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{q}_1$ は固有値 0 に対する A の

固有空間の基底である．$\|\boldsymbol{q}_1\| = \sqrt{3}$ より $\boldsymbol{p}_1 := \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ は同じ空間の正規直交基底となる（内積としては標準内積を考えている）．

一方，方程式 $A\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$ の一般解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (α, β は任意定数）となるので，$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば，この 2 つのベクトルは，固有値 3 に対する A の固有空間の基底をなす．そこでグラム・シュミットの直交化法を用いてこの空間の正規直交基底を求める．

$$\boldsymbol{q}'_3 := \boldsymbol{q}_3 - \frac{(\boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_2)}{\|\boldsymbol{q}_2\|^2}\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

とすれば，$\boldsymbol{q}_2$ と $\boldsymbol{q}'_3$ とは直交するので，これらのベクトルを定数倍してノルムを 1 にすることにより

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

が固有値 3 に対する A の固有空間の正規直交基底をなすことが分かる．

A が対称行列であることより，A の相異なる固有値に対する固有空間は互いに直交するので，3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなし，これらを並べて得られる行列

$$P := (\boldsymbol{p}_1\, \boldsymbol{p}_2\, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

は直交行列となり，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ となる．

解答終わり

一般に，実正方行列 A に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在するためには，A が対称行列であることが必要かつ十分である．また，複素正方行列 A に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列となるようなユニタリ行列 P が存在するためには，A が正規行列であることが必要かつ十分である． ここで，A が正規行列であるとは $A\,{}^t\bar{A} = {}^t\bar{A}\,A$ が成り立つことをいう．

n 次の実対称行列あるいは正規行列が与えられたときに，直交行列あるいはユニタリ行列によってそれを対角化する方法をここでまとめておく．

(a) A の**特性多項式（固有多項式）**の根を求めることにより，A の**固有値**を求める．

(b) A の固有値 α に対して，方程式 $A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$ を解くことにより，固有値 α に対する A の**固有空間** $\{\boldsymbol{x}\in K^n \mid A\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}\}$ **の基底**を求める．ここで，直交行列によって対角化する場合は $K=\mathbb{R}$ とし，ユニタリ行列によって対角化する場合は $K=\mathbb{C}$ とする（斉次連立1次方程式の一般解は，特殊解の線形結合として表すことができる．例えば掃き出し法により一般解を求める操作を行えば，それはとりもなおさず，解空間の基底を求めていることになる）．

(c) **グラム・シュミットの直交化法**を用いて，それぞれの**固有空間の正規直交基底**を求める（正規直交基底の選び方は一通りではない）．

(d) **A が実対称行列（正規行列）である場合は，相異なる固有値に対する固有空間は互いに直交する**ので，それぞれの固有空間の正規直交基底を集めたものは K^n の正規直交基底をなし，これらを並べて得られる行列 P は直交行列（ユニタリ行列）となり，さらに $P^{-1}AP$ は，A の固有値を対角成分とする対角行列になる．

上記の (c) についてであるが，A の特性多項式が重根を持たない場合は，それぞれの固有値に対する固有空間は1次元であるので，「グラム・シュミットの直交化法」などと大げさな言い方をするまでもなく，単に固有ベクトルのノルムを1にすればよい．

検算についてもコメントしておこう．

実対称行列に限っていえば，固有値はすべて実数である．したがって，もしその特性多項式が実数でない根を持つという結果が出たとしたら，それはそこまでの計算が間違っていることを意味する．

ユニタリ行列（直交行列）P については，$P^{-1}={}^t\bar{P}$（直交行列の場合は複素共役は不要）が成り立つので，$P^{-1}AP$ は容易に計算できる．時間に余裕があれば，是非検算されたい．また，${}^t\bar{P}P$ が単位行列になることも確認しておくことをお勧めする．

5.4 おわりに

今回は，グラム・シュミットの直交化法や，直交行列（ユニタリ行列）による対角化の問題を中心に考察した．直交行列による対角化の応用として，**2次形式**の問題があるが，今回は取り上げなかった．

次回は複素解析に関する問題を取り扱う．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

機械学習の情報幾何(2)

Boostingの情報幾何

甘利 俊一

一つの学習機械によい仕事をさせようと力を入れても，都合のよい機械を使わないとうまくいかない．良い機械は局所解に落ち込んだり過学習になりやすいなど，困難も多い．いっそのこと，性能がそこそこの機械（弱学習機械と呼ぶ）をたくさん集めてきて，これを統合して強力な学習機械が作れないだろうか．このアイデアは，Kearns と Valiant に由来し，これを実現したのが Freuend and Schapire[1)]，Schapire ら[2)]が提唱し Boosting というアイデアである．

学習を確率的な枠組みでとらえるので，情報幾何が有効である．これは，Lebanon and Lafferty[3)]によって指摘され，後に江口，村田，金森，竹ノ内ら[4~7)]が精力的に基礎を築き，一般的な枠組みで理論を完成させた．今回は，村田の解説に従いながら，学習機械の Boosting を簡潔に分かりやすく説明してみたい．より詳しい話は文献 8, 9) などを参照されたい．

21.1 Boostingの枠組み

いま，パターンベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ が多数あり，これらは C_+ または C_- の 2 つのクラスのどちらかに属するとしよう．与えられた $\boldsymbol{x}$ がどのクラスに属するかを判別するのがパターン認識問題である．$\boldsymbol{x}$ に対して判別の答が y であるとし，$\boldsymbol{x}$ が C_+ に属するならば $y=1$，C_- に属するならば $y=-1$ とする．学習用のデータとして N 個の正解の組 $D=\{(\boldsymbol{x}_1,y_1^*),\cdots,(\boldsymbol{x}_N,y_N^*)\}$ が与えられているものとする．新しいパターン $\boldsymbol{x}$ を判別するには，判別機と呼ぶ関数 $F(\boldsymbol{x})$ を用いて，この値が正ならば，$\boldsymbol{x}$ は C_+ に属し，負ならば C_- に属すると決定する．つまり $y=\mathrm{sgn}F(\boldsymbol{x})$ とする．$F(\boldsymbol{x})$ をうまく構成すると，パターン認識で性能があがる．

ここで，簡単な弱学習機械を T 個用意しよう．a 番目の機械の出す答を $h_a(\boldsymbol{x})$

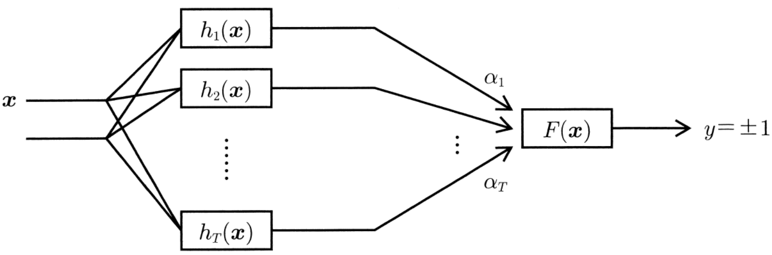


図 21.1　弱学習機械 $h_1, \cdots, h_T$ の多数決による統合.

と書く $(a=1,\cdots,T)$. $h_a(\boldsymbol{x})$ は ± 1 の 2 値を取る関数とし，出力を

$$y_a = h_a(\boldsymbol{x}) \tag{21.1}$$

と書く．弱学習機械は単純パーセプトロンでも良いし，多層パーセプトロン，サポートベクトル機械，その他何を混ぜてもよい．弱学習機械を統合して良い機械を作るのに，重みつき多数決を用いよう．すなわち，$\alpha_1,\cdots,\alpha_T$ を重みとして，

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{T} \alpha_a h_a(\boldsymbol{x}) \tag{21.2}$$

で $F(\boldsymbol{x})$ を作る (図 21.1)．F は 2 値関数でないから，F の正負で $y = \mathrm{sgn}\, F(\boldsymbol{x})$ のように 2 値関数 $h(\boldsymbol{x})$ を構成する．

ここで問題が 2 つ生ずる．一つは，多数の弱学習機械 $h_a(\boldsymbol{x})$ をどのように作るかである．これを勝手に定めるのではなくて，全体として弱点を打ち消し合い，うまい F が作れるようにしたい．もう一つは，弱学習機械を統合する重み α_a をどのように定めるかである．問題を一挙に解くのではなくて，弱学習機械を一台ずつ構成し，その都度重みを定めていく逐次的な方式を考える．

21.2 確率機械としての認識装置と誤り確率

関数 $F(\boldsymbol{x})$ による識別は決定論的である．しかし，話の便宜上，確率的な解釈を導入して，入力が $\boldsymbol{x}$ のときにこの機械が出力 y を出す確率を仮に

$$q(y|\boldsymbol{x}) = c \exp\left\{\frac{1}{2} y F(\boldsymbol{x})\right\} \tag{21.3}$$

としてみよう．ここで，c は規格化定数である．もちろん $\boldsymbol{x}$ に対して $F(\boldsymbol{x}) > 0$ ならば $y=1$ を出す確率が大きく，$F(\boldsymbol{x}) < 0$ ならば $y=-1$ となる確率が大きい．しかも，$|F(\boldsymbol{x})|$ が大きいほど，$+1$ または -1 になる確率は 1 に近い．実際の決定は，$\boldsymbol{x}$ に対して y が 1 か -1 かを，$\mathrm{sgn} F(\boldsymbol{x})$ で決める．

いま，$\boldsymbol{x}$ に対する正解を $y^*(\boldsymbol{x})$ と書こう．機械が誤るのは $y = -y^*(\boldsymbol{x})$ となるときである．ここで，y に関係しない定数

$$c' = c \exp\left\{\frac{1}{2} y^*(\boldsymbol{x}) F(\boldsymbol{x})\right\} \tag{21.4}$$

を用いて (21.3) を

$$q(y|\boldsymbol{x}) = c' \exp\left[\frac{1}{2}\{y - y^*(\boldsymbol{x})\} F(\boldsymbol{x})\right] \tag{21.5}$$

と書き変えておこう．

c も c' も y によらない定数である（$\boldsymbol{x}$ には依存する）．機械が例題 $\boldsymbol{x}_i$ を誤るのは $y = -y_i^*$ のときであるから，その確率は

$$q\left(-y_i^* \left| \boldsymbol{x}_i\right.\right) = c' \exp\left\{-y_i^* F\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right\} \tag{21.6}$$

となる．規格化定数 c' を無視することにし，この機械が $\boldsymbol{x}_i$ を判定するときの性能の悪さの度合を誤り確率を用いて

$$\tilde{W}\left(\boldsymbol{x}_i\right) = \exp\left\{-y_i^* F\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right\} \tag{21.7}$$

で定める．これは例題毎に決まるから，これを規格化し，

$$Z = \sum_i \tilde{W}\left(\boldsymbol{x}_i\right) \tag{21.8}$$

を用いて

$$W\left(\boldsymbol{x}_i\right) = \frac{1}{Z}\tilde{W}\left(\boldsymbol{x}_i\right) \tag{21.9}$$

と置く．$\sum W\left(\boldsymbol{x}_i\right) = 1$ であるから，これは $F(\boldsymbol{x})$ が例題 $\boldsymbol{x}_i$ を処理するときの悪さを全例題上に和が 1 となる重みとして割り当てたものである．

ここで，例題のうちで機械 $F(\boldsymbol{x})$ が正しく答えるもの，すなわち $y_i^* F\left(\boldsymbol{x}_i\right) > 0$ である添字の集合を I_+，誤るものの添字の集合を I_- とする．このとき，機械 F の性能の悪さを

$$\varepsilon_F = \sum_{i \in I_-} W\left(\boldsymbol{x}_i\right) \tag{21.10}$$

で評価し，これを機械の損失または“誤り確率”と解釈する．

21.3 新しい弱学習機械の決定

弱学習機械を一つずつ作っていこう．いま，弱学習機械を順番に定めてきて，$h_1(\boldsymbol{x}), \cdots, h_t(\boldsymbol{x})$ とその重み $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ が決まったとしよう．すなわち

$$F_t(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{t} \alpha_a h_a(\boldsymbol{x}) \tag{21.11}$$

が決まり，その機械が例題 $\boldsymbol{x}_i$ を誤る確率

$$W_t\left(\boldsymbol{x}_i\right) = \frac{1}{Z_t} \exp\left\{-y_i^* F_t\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right\} \tag{21.12}$$

も決まったとする．これをもとに，新しい弱学習機械 $h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ を作る．新しい機械は今までの機械ではうまく判別できなかった苦手な例題を D の中から選

んで，それらをうまく識別するように学習するのが良い．そこで，$h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ を学習するのに，学習データ $\boldsymbol{x}_i$ に重みを付け，$\boldsymbol{x}_i$ は重み（頻度）$W_t(\boldsymbol{x}_i)$ で出現するものとして，学習を進める．こうすれば，新しい機械 $h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ は苦手のパターンを中心に学習することになるから，これまでの機械の弱点を克服できる．こうして $h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ が定まれば，次は α_{t+1} を定め，これらを融合して $F_{t+1}(\boldsymbol{x})$ を作る番である．

21.4 新しい重みの決定

新しい重みを $\alpha = \alpha_{t+1}$ として，これまでの $t+1$ 個の機械を総合して

$$F_{t+1}(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{t} \alpha_a h_a(\boldsymbol{x}) + \alpha h_{t+1}(\boldsymbol{x}) \tag{21.13}$$

を作る．$F_{t+1}(\boldsymbol{x})$ による条件付き確率分布

$$q(y\,|\boldsymbol{x},\alpha) = c\exp\left\{\frac{1}{2}yF_t(\boldsymbol{x})\right\} = c\exp\left\{\frac{1}{2}yF_t(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\alpha y h_{t+1}(\boldsymbol{x})\right\} \tag{21.14}$$

を考える．重み α として何がよいかは，学習用のデータ $D = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1), \cdots, (\boldsymbol{x}_N, y_N)\}$ をもとに決める．それには，例題 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ に対して，この機械が答として正解 $y_1^*, \cdots, y_N^*$ を出す確率（尤度）を最大にするように，α を決めればよい．しかし，規格化定数 c は α の関数 $c(\alpha)$ であるから，これをこのまま求めようとすると式がいささか面倒である．そこでトリックを少し使う．

条件付き確率分布 $q(y|\boldsymbol{x})$ 全体の空間を S とする．すると，N 個の例題 D の確率分布は，その要素である分布 $q(y_i\,|\boldsymbol{x}_i)$ の積の空間の中にある．$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ を固定して考える．すると，正解 $y_1^*, \cdots, y_T^*$ の出現する条件付き確率は，

$$q(y_1^*, \cdots, y_T^*, \alpha) = \exp\left\{\sum\left[\frac{1}{2}y_i^* F_t(\boldsymbol{x}_i) + \frac{1}{2}\alpha y_i^* h_{t+1}(\boldsymbol{x}_i)\right] - \psi(\alpha)\right\} \tag{21.15}$$

のように書ける．ここで $\psi(\alpha)$ が α に依存する規格化定数 $c(\alpha)$ に対応する．

規格化定数 c はどうでも良いとして，確率分布 $q(y|\boldsymbol{x})$ を正の測度の空間に拡張して考えよう．規格化の重みを無視した正測度分布の集まりを

$$M = \left\{c\exp\left\{\frac{1}{2}yF(\boldsymbol{x})\right\};\ c>0 \text{ は任意}\right\} \tag{21.16}$$

とする．ここでは c は何でもよいとする．

最尤推定とは，データ D の作る経験分布

$$p_{\mathrm{emp}}(y, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\sum \delta(y - y_i^*)\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) \tag{21.17}$$

から，α を含む 1 次元モデル (21.14) への KL ダイバージェンス

$$KL\left[p_{\mathrm{emp}}(y, \boldsymbol{x}) : q(y\,|\boldsymbol{x}, \alpha)\right] \tag{21.18}$$

を最小にする α であり，これは経験分布 p_{emp} を (21.14) の作る空間に m 射影

することで得られた．ところで，規格化定数を無視した $q\,(y\,|\boldsymbol{x})$ の作る空間を

$$M = \left\{ c \exp\left\{ \frac{1}{2} y F_t(\boldsymbol{x}) + \alpha y h_{t+1}\,(\boldsymbol{x}) \right\} \right\} \tag{21.19}$$

とすれば，経験分布をこの拡大した空間に m 射影しても，似た答が得られるだろう．参考のため次の補題で示す．

補題　確率分布 $p_0(y)$ を正測度空間 $M = \{cp(y,t)\}$（$c > 0$ は任意，t はパラメータ）へ m 射影したものは，対応する確率分布空間 $S = \{p(y,t)\}$ への m 射影に等しい．

証明　正測度空間における KL ダイバージェンスは

$$KL\,[p_0(y) : cp(y,t)] = \sum p_0(y) \log \frac{p_0(y)}{cp(y,t)} + \sum cp(y,t) - \sum p_0(y) \tag{21.20}$$

である．これを計算すると

$$\begin{aligned} KL\,[p_0(y) : cp(y,t)] &= -\sum p_0(y) \log \{cp(y,t)\} + c + d \\ &= -\sum p_0(y) \log p(y,t) + c - \log c + d \end{aligned} \tag{21.21}$$

である．ここで，

$$d = \sum p_0(y) \log p_0(y) - \sum p_0(y) \tag{21.22}$$

は c と t に関係しない．これを c で微分して 0 と置けば，射影先の c の値は $c = 1$ となる．次はどの t に射影されるかであるが，これは $KL\,[p_0(y) : p(y,t)]$ を最小にする t に等しい．すなわち，$p_0(y)$ を M に m 射影したものは，これを S に m 射影したものに等しい．

しかし，条件付確率 $q(y|\boldsymbol{x})$ の場合，規格化定数 $c(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ に依存する．このため，経験分布で期待値をとるときに，いろいろな $c\,(\boldsymbol{x}_i)$ が混ざるため，この補題のようにはいかない．したがって，ここでの議論は S ではなくて M への射影として考えることにする．

規格化定数を無視して，（条件付）正測度

$$\tilde{q}(y\,|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \exp\left\{ \frac{1}{2}\,(y - y^*(\boldsymbol{x})) \sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i(\boldsymbol{x}) \right\} \tag{21.23}$$

を考えよう．$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$ で，$y^*(\boldsymbol{x})$ は教師の与える正解だから

$$y^*\,(\boldsymbol{x}_i) = y_i^* \tag{21.24}$$

となる．ここで，経験分布 $p_{\mathrm{emp}}(y, \boldsymbol{x})$ から $\hat{q}\,(y\,|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$ への KL ダイバージェンスを計算する．$\boldsymbol{\alpha}$ に関係しない項を C と書けば，

$$\begin{aligned} &KL\,[\tilde{p}_{\mathrm{emp}}(y, \boldsymbol{x}) : \tilde{q}(y\,|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})] \\ &= C - \sum_i \log \tilde{q}\,(y_i\,|\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\alpha}) + \sum_{i,y} q\,(y\,|\boldsymbol{x}_i) \end{aligned}$$

$$= C - \frac{1}{2}\sum_i \{y_i^* - y^*(\boldsymbol{x}_i)\} \sum \alpha_j h_j(\boldsymbol{x}_i)$$

$$+ \sum_i \sum_{y_i=1,-1} \exp\left\{\frac{1}{2}(y_i - y_i^*) \sum \alpha_j h_j(\boldsymbol{x}_i)\right\} \tag{21.25}$$

である．ところが，$y_i^* = y^*(\boldsymbol{x}_i)$ であるから右辺の第 2 項は 0 となる．

第 3 項では，y_i について 1 と -1 のときの和をとるが，これは y_i について y_i^* と $-y_i^*$ の和に書ける．$y_i = y_i^*$ のときは $y_i - y_i^* = 0$ となり，$y_i = -y_i^*$ のときは，$y_i - y_i^* = -2y_i^*$ である．だから最小化すべき式は，$\boldsymbol{\alpha}$ によらない定数部分を無視すれば，

$$L(D, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_i \exp\left\{-y_i^* \sum \alpha_j h_j(\boldsymbol{x}_i)\right\} \tag{21.26}$$

となる．いま，$\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ は決まっていて，$\alpha = \alpha_{t+1}$ を決める番であった．そこで，α_{t+1} を含む項を取り出せば，前に定めた重み $W_t(\boldsymbol{x}_i)$ を用いて

$$L(D, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{Z_t} \sum_i W_t(\boldsymbol{x}_i) \exp\{-\alpha y_i^* h_{t+1}(\boldsymbol{x}_i)\}. \tag{21.27}$$

例題 $\boldsymbol{x}_i$ のうちで，機械 $h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ が単独で正しく識別するものは

$$y_i^* h_{t+1}(\boldsymbol{x}_i) = 1, \tag{21.28}$$

誤るものは

$$y_i^* h_{t+1}(\boldsymbol{x}_i) = -1 \tag{21.29}$$

である．そこで，例題を 2 つに分けて，機械 $h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ が正しく識別するものの添字を I_+，誤るものを I_- で表す．

(21.27) 式の L で規格化した誤り確率の重み $W_t(\boldsymbol{x}_i)$ を用い，α で微分すれば，

$$\sum_i W_t(\boldsymbol{x}_i)\, y_i^* h_{t+1}(\boldsymbol{x}_i)\, e^{-\alpha\{y_i^* h_{t+1}(\boldsymbol{x}_i)\}} = 0 \tag{21.30}$$

が α を定める方程式である．i についての和を，I_+ に属するものと I_- に属するものに分け，

$$\varepsilon_{t+1} = \sum_{i \in I_-} W_t(\boldsymbol{x}_i), \quad 1 - \varepsilon_{t+1} = \sum_{i \in I_+} W_t(\boldsymbol{x}_i) \tag{21.31}$$

とする．ε_{t+1} は $h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ が間違えるパターン $\boldsymbol{x}_i$ についての重みの和である．これを用いれば (21.30) は

$$-\varepsilon_{t+1} e^{-\alpha} + (1 - \varepsilon_{t+1})\, e^{\alpha} = 0, \tag{21.32}$$

これより

$$\alpha = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_{t+1}} \tag{21.33}$$

が得られる．

例題 $\boldsymbol{x}_i$ の新しい重みは

$$W_{t+1}(\boldsymbol{x}_i) = \frac{1}{Z_{t+1}} W_t(\boldsymbol{x}_i) \exp\left\{-\alpha_{t+1} y_i^* h_{t+1}(\boldsymbol{x}_i)\right\} \quad (21.34)$$

で，逐次的に作ればよい．なお，新しい重み $W_{t+1}(\boldsymbol{x}_i)$ を用いたときは，機械 $h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ での誤り確率 $\bar{\varepsilon}_{t+1}$ は，

$$\bar{\varepsilon}_{t+1} = \sum_{i \in I_-} W_{t+1}(\boldsymbol{x}_i) = \frac{1}{Z_{t+1}} \sum_{i \in I_-} W_t \exp\left\{-\alpha_{t+1} y_i^* h_{t+1}(\boldsymbol{x}_i)\right\} \quad (21.35)$$

となる．ここに，I_- は $h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ によって誤るパターン $\boldsymbol{x}_i$ のインデックスである．ところで

$$Z_t = \sum_{i \in I_+} W_t(\boldsymbol{x}_i) e^{-\alpha_t} + \sum_{i \in I_-} W_t(\boldsymbol{x}_i) e^{\alpha_t} \quad (21.36)$$

である．これを整理し，(21.33) を用いれば，

$$\bar{\varepsilon}_{t+1} = \frac{1}{2} \quad (21.37)$$

がわかる．つまり，新しい重み $W_{t+1}(\boldsymbol{x}_i)$ は，$h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ では全く歯がたたないもの，つまりこの機械では五分五分で誤るように作られている．

21.5 学習機械の融合と指数型分布族

識別機械 $F_t(\boldsymbol{x})$ を考えると，その出力を確率として捉えれば，それは条件付確率

$$q_t(y|\boldsymbol{x}) = \exp\left\{\frac{1}{2} y \sum h_j(\boldsymbol{x}) \alpha_j - \psi(\boldsymbol{\alpha})\right\} \quad (21.38)$$

で定まる．$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$ をパラメータと考えれば，それは確率変数 $yh_1(\boldsymbol{x}), \cdots, yh_t(\boldsymbol{x})$ の張る e 平坦の部分空間で，t 次元の指数型分布族である．いま，$\alpha_1, \cdots, \alpha_{t-1}$ は定まっているとし，最後の $\alpha = \alpha_t$ を自由なパラメータとすれば，候補は

$$q_t(y|\boldsymbol{x}, \alpha) = \exp\left\{\frac{1}{2} y h_t(\boldsymbol{x}) \alpha + \frac{1}{2} y F_{t-1}(\boldsymbol{x}) - \psi(\alpha)\right\} \quad (21.39)$$

で表される M 上の e 測地線に他ならない．その接方向は

$$\frac{d \log q_t}{d\alpha} = \frac{1}{2} y h_t(\boldsymbol{x}) \quad (21.40)$$

である．

最後の重み α_t を決めるのに，(21.39) のような α_t をパラメータとする 1 次元 e 平坦多様体 E_t を考え，α_t の値は経験分布 $p_{\mathrm{emp}}(y, \boldsymbol{x})$ からの KL ダイバージェンスを最小にするように定めた．つまり，p_{emp} をここへ m 射影したものである（図 21.2）．p_{emp} を通り E_t と直交する m 平坦多様体を考えれば，

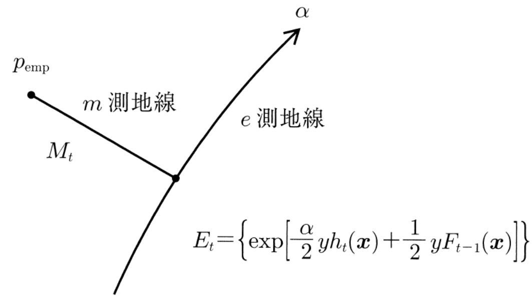


図 21.2 p_{emp} の α をパラメータとする e 測地線への m 射影．

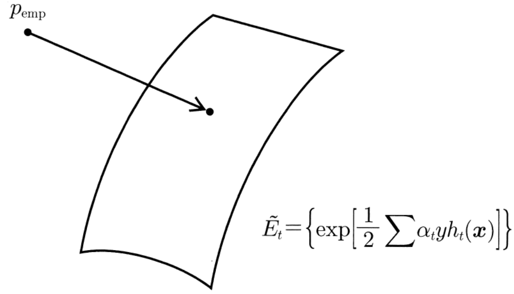


図 21.3 p_{emp} を E_t へ m 射影して $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ を求める．

それは

$$M_t=\left\{p(y|\boldsymbol{x}):\sum_{i=1}^{N}\sum_{y}p\left(y\left|\boldsymbol{x}_i\right.\right)\left\{\frac{1}{2}\left(y-y_i^*\right)h_t\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right\}=0\right\} \tag{21.41}$$

を満たすような条件付確率の全体であり，E_t と M_t の交点が新しく得られた識別関数である．だから，これは $\alpha_t=0$ のときの F_{t-1} を M_t へ e 射影したものといってもよい．

21.6 Boosting の若干の拡張

Boosting では，弱学習機械 $h_1,\cdots,h_{t-1}$ とその重み $\alpha_1,\cdots,\alpha_{t-1}$ は一度定めたら固定してもう変えない．その上で，h_t を追加しその重み α_t を最適な値に定める．しかし，(21.38) にあるようにこの段階で再び $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ を変数とみなし，それらで作る t 次元多様体 $\tilde{E}$ の中で p_{emp} からのダイバージェンスを最小にするものを求めたほうが良いかもしれない（図 21.3）．すなわち段階 t ではすべての $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ を更新することにし，

$$KL\left[p_{\text{emp}}:\exp\left\{\frac{1}{2}\left(y-y(\boldsymbol{x})\right)\sum\alpha_j h_j(\boldsymbol{x})\right\}\right] \tag{21.42}$$

を最小にする $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ を求めるのである．前には，これを α_t で微分して，それを 0 とおいて α_t を求めた．(21.33) がそれである．勝手な α_j で偏微分して 0 とおけば，同様な式

$$e^{2\alpha_j}=\frac{1-\varepsilon_{t,j}}{\varepsilon_{t,j}} \tag{21.43}$$

が得られる．ただし，

$$\varepsilon_{t,j}=\frac{1}{Z_{t,j}}\sum_{i\in I_{j,-}}W_t\left(\boldsymbol{x}_i\right) \tag{21.44}$$

で，$I_{j,-}$ は機械 $h_j(\boldsymbol{x})$ が誤る例題の集まりである．α_j の式は他のすべての α_i $(i\neq j)$ を含むから，これは連立方程式である．しかし，これをきちんと解かなくとも，α_t から始めて（他の α_j は固定して）$\alpha_{t-1},\cdots,\alpha_1$，そして最後に

再び α_t を求めれば，かなり良い解が得られるのではないかと予想される．こうすれば，せっかく得た弱学習機械の能力を十分に活用できる．もちろん，これは計算の手間とのトレードオフである．

一方，α_t の調整をそれほど精密にやる必要はないという意見もある．弱学習機械の列 $h_1(\boldsymbol{x}), \cdots, h_t(\boldsymbol{x})$ を考えれば，はじめのうちはそれなりに良い機械が現れるが，後のほうは始末に終えない例題を対象に悪戦苦闘するだけになる．ここに力を入れても仕方がない．むしろ，c を適当な定数として

$$\alpha_t = \frac{c}{c+t} \tag{21.45}$$

ぐらいに選んだほうが良いという（江口，私信）．

21.7 一般のダイバージェンスによる Boosting

これまで説明してきた boosting は AdaBoost と呼ばれるものである．そこでは，識別機械 $F(\boldsymbol{x})$ の性能を評価するのに，例題 $(\boldsymbol{x}_i, y_i^*)$ に対して

$$L[F] = \exp\left\{-y_i F\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right\} \tag{21.46}$$

という損失関数を用いている．$F\left(\boldsymbol{x}_i\right)$ の符号が y_i^* と一致すれば，F は $\boldsymbol{x}_i$ に対しては正解を与え，そのときの損失は $\exp\left\{-\left|F\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right|\right\}$ だから $|F|$ が大きければこれは小さい．F が誤るときは損失は $\exp\left\{\left|F\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right|\right\}$ で，$|F|$ が大きくなるにつれ，指数的に増大する．

決定は $F(\boldsymbol{x})$ の符号で行うが，ここに確率的な解釈を導入した．すなわち，機械 F を用いると，$\boldsymbol{x}$ に対して y を答える確率を

$$q_F(y|\boldsymbol{x}) = c\exp\left\{\frac{1}{2}yF(\boldsymbol{x})\right\} \tag{21.47}$$

とした．これは正解確率に対する誤り確率の比

$$\frac{q_F(\text{誤})}{q_F(\text{正解})} = \exp\left\{-yF(\boldsymbol{x})\right\} = L[F] \tag{21.48}$$

が，損失関数に等しくなるようにしている．識別関数を弱学習機械 $h_1(\boldsymbol{x}), \cdots,$ $h_t(\boldsymbol{x})$ の線形結合 $\sum \alpha_i h_i(\boldsymbol{x})$ で作れば，これは指数型分布族になる．この空間は平坦であり，KL ダイバージェンスが導入されて，ピタゴラスの定理や射影定理が使える．ここから，上記 AdaBoost のアルゴリズムが導出された．

では，指数関数 exp の代わりに，正の単調増大の凸関数 $U(z)$ を用いて，損失関数を

$$L_U[F] = U\left(-yF\left(x\right)\right) \tag{21.49}$$

としてみよう．AdaBoost は $U(z) = \exp\{z\}$ と置いたものである．凸関数 $U(z)$ は，双対平坦な構造を導く．すなわち，

$$u(z) = U'(z), \quad v(z) = u^{-1}(z) \tag{21.50}$$

を2つの双対アファイン座標とする構造である．条件付確率 $q(y|\boldsymbol{x})$ のなす空間には，U ダイバージェンスが導入される．すなわち $p(y|\boldsymbol{x})$ と $q(y|\boldsymbol{x})$ のダイバージェンスは

$$D_U[p:q] = \sum_y \int \left[U\{v(q)\} - U\{v(p)\} - p\{v(q) - v(p)\}\right] d\boldsymbol{x} \quad (21.51)$$

である．

識別関数 $F(\boldsymbol{x})$ が定義する条件付確率 $q_F(y|\boldsymbol{x})$ は，この場合は

$$q_F(y|\boldsymbol{x}) = u\{yF(\boldsymbol{x})\} \quad (21.52)$$

で定める．すると，弱学習機械 $h_i(\boldsymbol{x})$ の線形結合で作る確率分布は，規格化定数を無視して正測度で考えて，

$$q(y|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = u\left\{\sum \alpha_i y h_i(\boldsymbol{x})\right\} \quad (21.53)$$

のように書ける．これは平坦な u-分布族をなす．α_t を決定するのに，経験分布からこの族への（α_t のみを変数として）U ダイバージェンスを最小にする解は，双対射影で得られる．

これをアルゴリズムで書き，α_t の決定，例題の重み $W_t(\boldsymbol{x}_i)$ の変更とそれによる次の弱学習機械 $h_{t+1}(\boldsymbol{x})$ の決定が同様にできる．基礎となる空間が双対平坦空間だからである．このアルゴリズムを U-Boost と呼び，話はこれまでと同様に進む．詳しくは，文献 4) を参照されたい．

終わりの一言

機械学習は，人工知能では古くから研究されていたテーマである．例題をもとに，その奥に潜む構造をいかに抽出できるかが問題であった．しかし，始めのころは論理的な仕組みを求める研究が主で，不可能なものは不可能であって理論や機械がそれほどうまくは構成できなかった．具体的な学習機械としては，古くからパーセプトロンがあったが，その能力は限られている．

しかし，1980 年代になって，逆誤差伝搬法を利用する学習法が提出され，多層パーセプトロンが復活した．これは，昔からわかっていたことではあった[10)]．しかし，これがある意味で万能学習機械であるから一世を風靡した．でも，現実には学習速度の遅いこと，局所解に落ち込んでしまうことなどの問題点が指摘され，学習の本質は何かかという問いが再浮上する．

学習は，限られた数の例題をもとに，その奥に潜む構造を求めることである．例題を完全に解こうとすると，この限られた例題だけにはうまく対処するが，これから出てくる新しい例題にはうまく対応できなくなる．例題に対してどのくらいうまく対処するか，そのときの誤差を訓練誤差と呼び，後者のこれから出るであろう例題全体に対する期待誤差を汎化誤差と呼ぶ．学習機械について，訓練誤差と汎化誤差の関係がどうなっているかが注目を集めた[11~13)]．これは統

計的学習理論と呼ばれる．また，Vapnik による一般理論があり，これは学習の収束の非一様性に着目して mini-max 基準を導入したものである[14]．これらの特性は，機械のパラメータの数や仕組みに依存する．こうして学習の一般的な特性を求めて機械学習の研究が大きなうねりとなった．

それに加えて，前回述べたサポートベクトル機械が登場し，カーネルトリックによって複雑な計算が可能になった．今回述べた Boosting は，多数の弱学習機械を利用しながら，学習で高性能を出そうというもので，これも大きく注目を集めている．さらに，グラフィカルモデルと信念伝搬学習法，応用面ではデータマイニング，とくにゲノムにかかわる生体情報への応用があって，機械学習はまさに花盛りである．今回はその一部を，情報幾何の立場から眺めたものである．

参考文献

1) Y. Freund and R.E. Shapire, A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting. *J. Computer and Systems Sciences*, **55**, 119–139, 1997.
2) R.E. Shapire, Y. Freuend, P. Bartlett and W.S. Lee, Boosting the margin: A new explanation for the effectiveness of voting methods, *Annals of Statistics*, **26**, 1651–1686, 1998.
3) G. Lebanon and J. Lafferty, Boosting and maximum likelihood for exponential models. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (NIPS), **14**, 2001.
4) N. Murata, T. Takenouchi, T. Kanomori and S. Eguchi, Information geometry of U-boost and Bregman divergence. *Neural Computation*, **16**, 1432–1481, 2004.
5) T. Takenouchi and S. Eguchi, Robustifying AdaBoost by adding the naive error rate, *Neural Computation*, **16**, 767–787, 2004.
6) T. Takenouchi, S. Eguchi, N. Murata and T. Kanamori, Robust boosting algorithm against mislabeling in multiclass problems, *Neural Computation*, **20**, 1596–1630, 2008.
7) T. Kanamori, T. Takenouchi, S. Eguchi and N. Murata, Robust loss function for boosting, *Neural Computation*, **19**, 2183–2244, 2007.
8) 麻生秀樹，津田宏治，村田昇，『パターン認識と学習の理論』，岩波書店，2003.
9) 村田昇，『情報理論の基礎』，サイエンス社，2005（新版：2008）.
10) S. Amari, A Theory of Adaptive Pattern Classifiers. *IEEE Trans.*, **EC-16**, **3**, 299–307,1967.
11) S. Amari, N. Fujita and S. Shinomoto, Four types of learning curves, *Neural Computation*, **4**, 605–618, 1992.
12) S. Amari and N. Murata, Statistical theory of learning curves under entropic loss criterion, *Neural Computation*, **5**, 140–153, 1992.
13) S. Amari, A Universal Theorem on Learning Curves, *Neural Networks*, **6**, **2**, 161–166, 1993.
14) V.N. Vaprik, *Statistical Learning Theory*. John Wiley, 1998.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

特　集（2013 年 5 月号予告）

次元の作法
物理を表現する心得

本体 952 円

次元の作法	米谷　民明
次元解析の基本	原田　恒司
国際単位系（SI）	藤井　賢一
普遍定数と次元	仲　　滋文
空間・時間・物質と次元	早田　次郎
宇宙の中の階層のつながり	森川　雅博
素粒子物理の相互作用	仁尾真紀子
基本定数の宇宙論的変動をめぐって	藤井　保憲
［コラム］	髙田　誠二
［コラム］	加藤　晃史

特　集（2013 年 3 月号）

光と物理学
自然を目で感じる

本体 952 円

巻頭言　もっと現象を見よう	久我　隆弘
粒子と波動	上田　正仁
光速度測定にみる物理学の発展史	鳥居　寛之
虹の七色　幾何光学，媒質の応答	久我　隆弘
空の青さ　ベクトル波動光学	本宮　佳典
黒体輻射	平野　琢也
ホログラフィー	志村　　努
光渦と角運動量	宮本　洋子
［コラム］光領域の原子時計	洪　　鋒雷
《連載》　例題形式で探求する微積分学の基本定理　その 2	森田　茂之
科学と社会　その 11	岡本　拓司
《人物で学ぶ物理》　第 10 回	井元　信之

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．数学では分野ごとにその分野特有の発想・考え方が使われております．今回は解析学に焦点を当てたものを組ませていただきました．今後は代数学，幾何学でも同様の特集を予定しておりますが，おそらく今回登場した考え方とはまた一味違った内容になるかと思います．そのときにはまた，今回の特集との比較などしていただければと思います．また，数学を専門としている方，あるいは専門ではないけれど日頃数学にお世話になっている方は何か応用できそうな考え方がないかいろいろと探求してみると面白いかもしれません．　(R)

*　　　*

先日，少し前にマイブームとなっていた「三国志」の雑誌を見つけ，つい衝動買いしてしまいました．三国の戦略や好きな武将の活躍などが書かれていて，再びブームが訪れそうです．

さて，本特集では解析学の様々な発想を先生方に紹介していただきました．この特集では解析学にスポットを当てましたが，他の主要分野である代数学・幾何学との関係も見過ごせません．数学の三分野は，三国志とは対称的に関連しあい発展しているようです．今後はこれら三分野間の関係性にも注目していきたいと思っています．　(T)

数　理　科　学　4月号

2013 年 4 月 1 日発行

数理科学編集部　　　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　ⓒ　株式会社 **サイエンス社**　　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁